Einführung in die Quantenfeldtheorie

Vorlesungsskript

Wintersemester 1996/97

Justus-Liebig-Universität Giessen

Markus H. Thoma

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Quantenfeldtheorie ist die Methode zur theoretischen Beschreibung der Elementarteilchenphysik, d.h. der elementaren Bausteine der Natur und ihrer Wechselwirkungen. Anwendung findet die Elementarteilchenphysik in den letzten Jahren verstärkt in kosmologischen und anderen astrophysikalischen Problemstellungen. Experimente mit Elementarteilchen werden hauptsächlich an Hochenergiebeschleunigern durchgeführt. Hohe Energien, gemessen in 1 GeV$= 1.6 \times 10^{-10}$J, sind dabei notwendig, um erstens eine hohe Auflösung zu erzielen ($\lambdabar = \hbar/p \leq d$), zweitens zur Erzeugung neuer Teilchen ($E > mc^2$). Besonders geeignet sind sog. Collider, bei denen die gesamte kinetische Energie der beschleunigten Teilchen für die Reaktion zur Verfügung steht. Die wichtigsten Collider und ihre Eigenschaften sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Beschleuniger	**Projektil-Target**	**Energie[GeV]**	**Entdeckungen**
LEP (CERN)	e^+-e^-	55	$W^\pm$, Z^0
HERA (DESY)	e^--p	$30(e^-)$, $820(p)$	Test der QCD
TEVATRON (FERMILAB)	p-$\bar{p}$	1000	Top-Quark
LHC (CERN) ab 2005	p-p	7000	Higgs?, Supersymmetrie?

Als Beispiel betrachten wir LEP: Die zur Verfügung stehende Schwerpunktsenergie des Elektron-Positron-Paares beträgt E=110 GeV. Der Impuls dieser ultrarelativistischen Teilchen ist gegeben durch $p \simeq E/c$, woraus die Auflösung $d = \hbar c/E = 0.2$ GeV fm/110 GeV$\simeq 2 \times 10^{-3}$ fm folgt, wobei 1 fm$= 10^{-15}$m ist. Die Energie reicht aus um W- und Z-Bosonen mit Ruheenergien von 80 - 90 GeV zu erzeugen.

Die theoretische Behandlung von Elementarteilchen und ihrer Eigenschaften beruht entweder auf gruppentheoretischen Methoden zur Untersuchung der zugrundeliegenden Symmetrien und zur Klassifizierung des Teilchenspektrums oder auf der Quantenfeldtheorie zur Beschreibung der Dynamik, z.B. zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Lebensdauern. Die Quantenfeldtheorie basiert auf einer Kombination von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie, da Elementarteilchenprozesse quantenmechanische, relativistische Prozesse sind.

Das Ziel dieser Vorlesung ist die Einführung in die Quantenfeldtheorie auf der Basis der kanonischen Quantisierung. Im wesentlichen werden wir uns hier auf die Quantenelektrodynamik als eines der wichtigsten und erfolgreichsten Beispiele für eine Quantenfeldtheorie konzentrieren. Aus Gründen der Einfachheit werden aber auch skalare Felder betrachtet und die gefundenen Resultate auf die Quantenelektrodynamik übertragen. Zunächst einmal soll hier aber ein kurzer Überblick über die Phänomenologie der Elementarteilchenphysik gegeben werden. Im nächsten Kapitel werden dann einige Notationen und die Theorie klassischer Felder dargestellt. Im dritten Kapitel kommen wir dann zur kanonischen Quantisierung dieser Felder, bevor im vierten Kapitel die Störungstheorie im Rahmen von Feynman-Regeln und ihre Anwendungen (Berechnung von Wirkungsquerschnitten) besprochen wird. Zuletzt wird noch ein kurzer Einblick in das komplexe Gebiet der Renormierung gewährleistet. Die verwendete Literatur wird an den relevanten Stellen angegeben. Zu einem großen Teil hält sich diese Vorlesung an das Buch von F. Mandl und G. Shaw, *Quantum Field Theory* (John Wiley, Chichester, 1984), das inzwischen auch in deutscher Übersetzung vorliegt.

1.1 Phänomenologie der Elementarteilchenphysik

Das Bild der modernen Elementarteilchenphysik wurde in den letzten 20 bis 30 Jahren einer drastischen Wandlung unterzogen. Die elementaren Bausteine der Materie sind nach heutiger Ansicht durch Fermionen gegeben, während als Vermittler der Wechselwirkungen oder zur Erzeugung von Massen Bosonen angesehen werden.

1.1.1 Bausteine der Materie

Alle Materie besteht aus Quarks (Up, Down, Strange, Charm, Bottom, Top) und Leptonen (Elektron, Muon, Tauon und zugehörige Neutrinos), die jeweils in drei Familien auftreten:

1.Familie	2.Familie	3.Familie
u	c	b
d	s	t
e	μ	τ
ν_e	ν_μ	ν_τ

Dazu kommen noch die Antiteilchen. Quarks sind die Bestandteile der Hadronen, d.h. der stark-wechselwirkenden Teilchen, wobei man noch zwischen den fermionischen Baryonen (Proton, Neutron, Delta, etc.) und den bosonischen Mesonen, z.B. Pionen, unterscheidet. Die Hadronen werden nicht mehr als fundamentale Elementarteilchen betrachtet, da sie aus Quarks zusammengesetzt sind. Mit Hilfe dieser Annahme ist man in der Lage, das gesamte Spektrum der Hadronen qualitativ zu erklären, wobei Baryonen drei Quarks und Mesonen ein Quark und ein Antiquark enthalten. Die in der Natur vorkommende Materie wird aus den Teilchen der ersten Familie in Form von Neutronen und Protonen, die aus Up- und Down-Quarks bestehen, im Atomkern und der atomaren Elektronenhülle gebildet. Die Teilchen der höheren Familien treten in hochenergetischen Prozessen, wie z.B. in Beschleunigerexperimenten, in Erscheinung. Alle diese Teilchen sind Fermionen und besitzen den Spin 1/2. Sie umfassen ein breites Massenspektrum und sind bis auf die Neutrinos elektrisch geladen. In der folgenden Tabelle sind die experimentell bekannten Massen bzw. Obergrenzen der Massen und Ladungen in Einheiten der Elementarladung aller Quarks und Leptonen angegeben. (Das Top-Quark wurde erst 1994 entdeckt.)

Teilchen	Ruheenergie	Ladung
u	2-8 MeV	2/3
d	5-15 MeV	-1/3
s	100-300 MeV	-1/3
c	1-1.6 GeV	2/3
b	4.1-4.5 GeV	-1/3
t	170-190 GeV	2/3
e	511 keV	1
μ	106 MeV	1
τ	1.78 GeV	1
ν_e	< 7 eV	0
ν_μ	< 270 keV	0
ν_τ	< 31 MeV	0

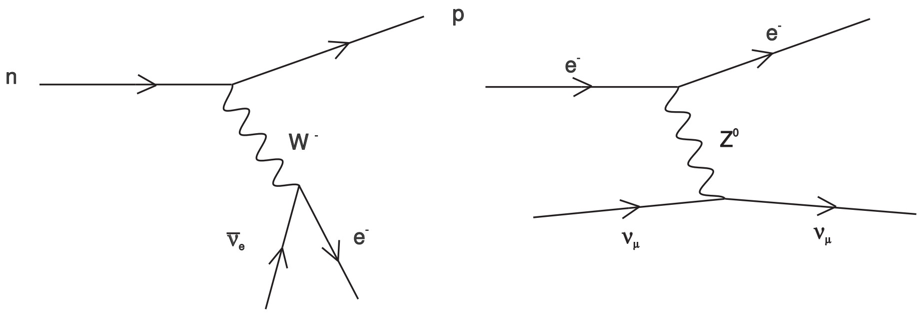


Abbildung 1.1:

1.1.2 Fundamentale Wechselwirkungen

Die Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen werden durch sog. Eichtheorien beschrieben, auf die wir im nächsten Kapitel näher eingehen werden. In der quantisierten Version kommen die Wechselwirkungen durch den Austausch von Teilchen, den Eichbosonen, zustande. Man unterscheidet heutzutage vier Arten der Wechselwirkung.

1.Gravitation

Die bisher am wenigsten verstandene Wechselwirkung, an der alle Teilchen gemäß ihrer Masse bzw. Energie teilnehmen, ist die Gravitation. Sie ist sehr schwach: Die Anziehung zwischen einem Elektron und einem Positron aufgrund der Gravitation ist etwa 10^{-36} mal schwächer als ihre elektrostatische Anziehung. Allerdings ist sie langreichweitig und wird im Gegensatz zur elektromagnetischen Kraft nicht abgeschirmt, so daß sie die dominante Wechselwirkung auf großen Längenskalen darstellt und insbesondere die Struktur des Universums bestimmt. Es ist bisher noch nicht gelungen, eine quantenmechanische Theorie der Gravitation abzuleiten. Auch das Austauschteilchen, das sog. Graviton, das einen Spin 2 und eine verschwindende Ruhemasse haben sollte, konnte bisher nicht entdeckt werden.

2.Schwache Wechselwirkung

Diese Wechselwirkung ist für den β-Zerfall und ähnliche Prozesse verantwortlich, z.B.

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \qquad \mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

und die Umwandlung von Quarks untereinander ($u, c, t \leftrightarrow d, s, b$). Alle fundamentalen Fermionen nehmen an dieser Wechselwirkung teil. Die Eichbosonen sind die $W^\pm$-, und das Z^0-Teilchen, die den Spin 1 und die Massen $m_W = 80$ GeV und m_Z=91 GeV besitzen. Wie der Name sagt, ist diese Wechselwirkung schwach, etwa 10^{-10} mal schwächer

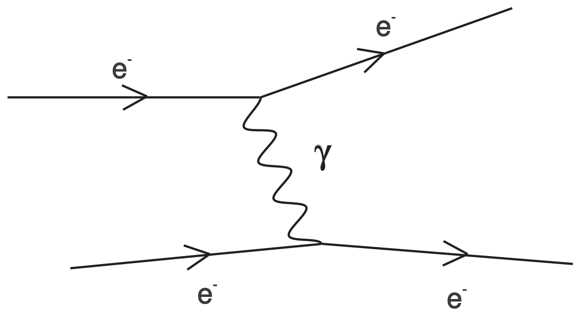


Abbildung 1.2:

als die elektromagnetische. Außerdem ist sie aufgrund der großen Massen der Eichbosonen kurzreichweitig, d.h. sie wird durch ein Yukawa-Potential $V(r) \sim \exp(-mr)/r$ beschrieben. In Abb.1.1 ist diagrammatisch dargestellt, wie der β^--Zerfall des Neutrons und Elektron-Muonneutrino-Streuung zustandekommen.

3.Elektromagnetische Wechselwirkung

Alle geladenen Teilchen, d.h. alle fundamentalen Fermionen (außer den Neutrinos) plus die $W^{\pm}$-Bosonen nehmen an der elektromagnetische Wechselwirkung teil. Beschrieben wird sie durch eine sog. abelsche U(1)-Eichtheorie, die in der quantisierten Version als Quantenelektrodynamik (QED) bezeichnet wird. Als Austauschteilchen dient das Photon, das einen Spin 1 und die Masse Null besitzt. Die Obergrenze für die Photonenmasse, 3×10^{-27} eV, wurde aus Messungen des galaktischen Magnetfeldes ermittelt, da eine endliche Photonmasse zu einer Änderung der Maxwell-Gleichungen führen würde. Z.B. ergibt sich eine langreichweitige elektromagnetische Wechselwirkung, wie sie durch das Coulomb-Gesetz, $V(r) \sim 1/r$, beschrieben wird, nur im Falle einer verschwindenden Photonmasse. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist verantwortlich für viele Prozesse in der Elementarteilchenphysik, wie z.B. Elektron-Elektron-Streuung (s. Abb.1.2), Compton-Streuung, π^0-Zerfall, etc. Außerdem bestimmt sie den Aufbau der makroskopischen Materie (Festkörperphysik).

Heutzutage werden die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung nicht mehr als unabhängig voneinander angesehen, sondern wurden zur sog. elektroschwachen oder Glashow-Weinberg-Salam Theorie vereinigt, die auf einer SU(2)×U(1)-Eichsymmetrie beruht. Bei Energien von ungefähr 100 GeV werden die beiden Wechselwirkungen gleich stark.

4.Starke Wechselwirkung

An der starken Wechselwirkung nehmen nur die Quarks teil, die die Substrukturteil-

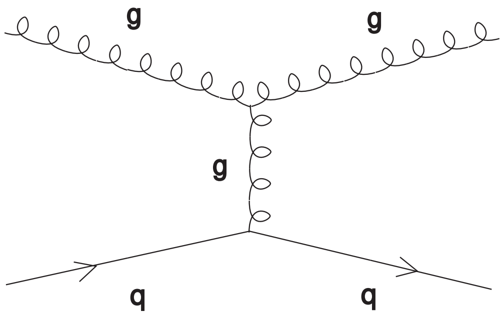


Abbildung 1.3:

chen der Hadronen darstellen. Die Wechselwirkung zwischen Quarks ist etwa 100 mal stärker als die elektromagnetische und wird durch eine nicht-abelsche SU(3)-Eichtheorie, in der quantisierten Version Quantenchromodynamik (QCD) genannt, beschrieben. Jedes Quark kommmt in drei verschiedenen "Farben" vor, die die Ladungszustände der starken Wechselwirkung kennzeichnen. Im Gegensatz zur elektromagnetischen Wechselwirkung gibt es also nicht nur eine Ladung (und ihre Anti-Ladung), sondern drei verschiedene, was dazu führt, daß es acht verschiedene masselose Eichbosonen mit Spin 1 gibt. Diese werden als Gluonen bezeichnet, sind elektrisch neutral, tragen aber eine Farbladung. Deshalb können die Gluonen im Gegensatz zu Photonen direkt miteinander wechselwirken (s. Abb.1.3).

Als Konsequenz dieser Gluonselbstwechselwirkung nimmt die Stärke der Wechselwirkung mit kleiner werdendem Abstand zwischen den Farbladungen (Quarks oder Gluonen, zusammenfassend als Partonen bezeichnet) ab (asymptotische Freiheit) und mit wachsendem Abstand zu. Bei großen Abständen scheint das Potential zwischen Farbladungen linear anzuwachsen ($V(r) \sim r$), so daß man von einem "Gummibandpotential" sprechen kann (s. Abb.1.4).

Es existieren somit keine freien Farbladungen (, die durch die Enden des Gummibandes oder "Strings" dargestellt werden), was als "Confinement" bezeichnet wird. In Übereinstimmung mit dieser Hypothese konnten z.B. bisher keine Drittelladungen, wie man sie für freie Quarks erwarten würde, nachgewiesen werden. Allerdings ist es bisher nicht gelungen, die Confinement-Hypothese aus der QCD zu beweisen. Dies liegt daran, daß bei Abständen größer als ca. 1 fm, die Wechselwirkung so stark wird, daß störungstheoretische Methoden nicht mehr anwendbar sind. Die Entwicklung nicht-störungstheoretischer Methoden, wie die Gittereichtheorie, bei der die QCD-Gleichungen numerisch auf einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Gitter gelöst werden, ist bisher noch nicht soweit fortgeschritten, um Confinement zu beweisen. Empirisch ergibt sich, daß

Abbildung 1.4:

alle Quarks in Hadronen eingebaut sind, wobei Baryonen aus drei Quarks (das Proton z.B. $p \hat{=} uud$) und Mesonen (z.B. $\pi^+ \hat{=} u\bar{d}$) aus einem Quark-Antiquark-Paar bestehen. Hadronen können somit als Quarktaschen, den sog. “Bags”, angesehen werden. Bei hohen Energien können sie zu Strings angeregt werden, aus denen ein Quark zwar nicht entfernt werden kann, die aber bei genügend hoher Energie in zwei Strings zerfallen können (“Zerreißen des Gummibandes”), was der Produktion eines Hadrons entspricht.

Die starke Wechselwirkung ist für viele Prozesse zwischen Hadronen verantwortlich, wie z.B. $\Delta \to N\pi$, wobei N ein Nukleon bezeichnet. Außerdem ist sie die letztendliche Ursache für die Kernkraft, die man als die Van-der-Waals Wechselwirkungen zwischen zwei Nukleonen auffassen kann. Insofern stellt der Atomkern eine Art Molekül der starken Wechselwirkung dar. Die Annahme einer Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung als Restwechselwirkung der Quarks erklärt auch die komplizierte Struktur des Nukleon-Nukleon-Potentials, wie z.B. seine Kurzreichweitigkeit und Spinabhängigkeit.

Heutzutage gibt es vielfältige experimentelle Hinweise auf die Existenz von Quarks, die zunächst Mitte der sechziger Jahre als Substrukturteilchen der Hadronen zur Erklärung der bis dahin entdeckten zahlreichen Hadronen postuliert wurden. Dabei wurden die Hadronen mit gleichem Spin und Parität zu Multipletts ähnlich wie beim Drehimpuls in der Quantenmechanik zusammengefaßt (s. Kap.2). Später wurde dann in sog. tiefinelastischen Streuexperimenten mit Elektronen festgestellt, daß Nukleonen tatsächlich drei Streuzentren besitzen, die mit den Quarks identifiziert wurden.

Allerdings ergab sich bei der Erklärung des Hadronenspektrums auf diese Weise ein Problem: So widerspricht z.B. das Δ^{++}-Teilchen ($J = 3/2$), das aus drei identischen Up-Quarks mit Spin in gleicher Richtung bestehen müßte, dem Pauli-Prinzip. Erst durch die Einführung einer zusätzlichen Quantenzahl, nämlich der Farbe, konnte diese Problem umgangen werden. Experimentell findet man aus dem Verhältnis der Wirkungsquerschnitte der Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen zu der in Muonenpaare, das proportional zur Anzahl der Quarkzustände ist, daß die Anzahl der Farben drei beträgt. Mitte der siebziger Jahre wurde dann erkannt, daß die Farbe nicht nur zur Rettung des Pauli-Prinzips dient, sondern in Form der Ladung der starken Wechselwirkung die Dynamik der Quarks bestimmt. Dazu wurde analog zur QED die QCD entwickelt. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Theorien liegt in der Selbstwechelwirkung der Gluonen als Folge der drei verschiedenen Farben. Diese ist die Ursache für die asymptotische Freiheit und vermutlich auch für Confinement.

Gluonen wurden zum ersten Mal am DESY beobachtet, wo sie sich in Form von sog. Drei-Jet-Ereignissen manifestieren. Ein Jet ist ein Schauer von Hadronen in einem kleinen Raumwinkelbereich, der sich aus der Stringfragmentation eines hochenergetischen Partons ergibt. Neben Ereignissen mit zwei Jets, die einem Quark-Antiquark-Paar entsprechen, wurden am DESY auch solche mit drei, die auf ein hochenergetisches Gluon hindeuten, registriert.

In den letzten Jahren wurde die QCD und ihre Vorhersagen z.B. in Elektron-Proton- oder aber auch in Proton-Proton-Streuexperimenten im Detail getestet. Ein Problem stellt dabei die Tatsache dar, daß sowohl die Anfangs- wie Endzustände durch nichtstörungstheoretische Prozesse (Confinement), die sich nur phänomenologisch behandeln lassen, bestimmt sind. Trotzdem besteht heute kein Zweifel mehr an der Richtigkeit der QCD als Theorie der starken Wechselwirkung.

Eines der Hauptziele der modernen Kernphysik stellt die Suche nach dem sog. Quark-Gluon-Plasma in relativistischen Schwerionenkollisionen dar. Dabei stellt man sich vor, daß die Kerne in diesen Kollisionen so stark komprimiert und aufgeheizt werden, daß der dabei enstehende Feuerball nicht mehr aus Hadronen besteht, sondern ein Phasenübergang zu einer neuen Art von Materie bestehend aus freien Quarks und Gluonen, dem Quark-Gluon-Plasma, stattfindet.

1.1.3 Spontane Symnmetriebrechung

In der oben beschrieben Vorstellung von den fundamentalen Wechselwirkungen tritt ein Problem auf, nämlich die Massen der W- und Z-Eichbosonen. Eichbosonen müssen nämlich masselos sein, da sonst die der Theorie zugrundeliegende Eichsymmterie verletzt ist. Ein Ausweg für dieses Problem besteht in der sog. spontanen Symmetriebrechung, bei der die Massen der W- und Z-Bosonen und auch der Fermionen durch die Wechselwirkung mit einem neuen Teilchen, dem sog. Higgs-Teilchen, zustandekommen. Dieses Teilchen existiert (, wie alle anderen Teilchen auch,) als virtuelles Teilchen im Vakuum. Die ursprünglich masselosen W- und Z-Eichbosonen und Fermionen bewegen sich also durch ein Medium von virtuellen Higgs-Teilchen und erhalten ähnlich wie die Elektronen in den Bändern eines Festkörper auf diese Weise eine effektive Masse. Allerdings wurde das Higgs-Teilchen, das den Spin 0 und eine Masse oberhalb von 60 GeV besitzen sollte, selbst noch nicht beobachtet. Seine Entdeckung stellt eine der großen

Herausforderung der experimentellen Hochenergiephysik dar.

1.1.4 Standardmodell und "Neue Physik"

Das oben dargestellte Bild der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen wird als das Standardmodell der Elementarteilchenphysik bezeichnet. Es besteht aus der QCD (SU(3)-Eichtheorie) und der elektroschwachen Theorie (SU(2)×U(1)-Eichtheorie mit spontaner Symmetriebrechung). Zusätzlich gibt es eine Reihe von weiteren Symmetrien neben der Eichsymmetrie, die bestimmen, welche Prozesse erlaubt sind. Dazu gehören die Energie-Impulserhaltung, die Drehimpulserhaltung, die Lorentzinvarianz (Kausalität), die Ladungserhaltung, die Baryonen- und Leptonenzahlerhaltung, das CPT-Theorem und das Pauli-Prinzip.

In gewisser Hinsicht stellt das Standardmodell allerdings keine wirklich fundamentale Theorie dar, da sie zum einen viele freie Parameter (Massen, Kopplungskonstanten etc.) enthält zum anderen nicht die Gravitation berücksichtigt. In den letzten Jahren wurden deshalb zahlreiche Verbesserungsvorschläge gemacht. Dabei wurde zunächst versucht, die elektroschwache und starke Wechselwirkung zur GUT ("Grand Unified Theory") zu vereinigen. Diese würde dann Übergänge zwischen Quarks und Leptonen erlauben, so daß z.B. das Proton in ein Positron zerfallen könnte. Die experimentell gemessene Untergrenze für die Lebensdauer des Protons liegt bei 10^{31} Jahren. Die GUT sollte als Eichtheorie die bekannten Eichgruppen als Untergruppen enthalten. Die kleinste Gruppe, die dies zuläßt, ist die SU(5), die 20 Eichbosonen enthält. D.h. neben den 12 bekannten Eichbosonen (Gluonen, Photon, $W^{\pm}$, Z^0) werden 8 weitere vorhergesagt. Die Vereinigungsenergie, bei der alle Wechselwirkungen gleich stark würden, liegt bei 10^{15} GeV, also weit außerhalb der derzeitigen experimentellen Möglichkeiten. Allerdings sagt die SU(5)-Eichtheorie eine Lebensdauer des Protons voraus, die weit geringer als die gemessene Grenze ist. Deshalb muß man auf höhere Eichgruppen, wie z.B. die SO(10), zurückgreifen.

Eine weitreichendere Theorie, die in den letzten 20 Jahren intensiv studiert wurde, ist die sog. Superstring-Theorie. Hierbei werden die Elementarteilchen als Anregungen geschlossener Strings mit Durchmessern typischerweise von 10^{-35} cm beschrieben. Der Vorteil dieser Theorie liegt darin, daß auf diese Weise die Gravitation mitberücksichtigt werden kann. Die Superstring-Theorie beruht auf einer Supersymmetrie, d.h. einer Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen: Zu jedem Fermion gibt es ein zugehöriges Boson und umgekehrt. Bisher konnte allerdings noch kein supersymmterisches Teilchen, wie z.B. das Photino, der fermionische Partner des Photons, beobachtet werden.

Ein weiteres Problem besteht darin, daß Superstring-Theorien nur in 11 Dimensionen konsistent formuliert werden können. Durch sog. Kompaktifizierung können sieben Dimensionen beseitigt werden. Allerdings ist dieses Verfahren nicht eindeutig, so daß die Vorhersagekraft dieser Theorie sehr eingeschränkt ist. Darüberhinaus gibt es, genau wie bei der GUT, bisher keine experimentellen Hinweise, z.B. neue Teilchen, auf die Relevanz der Superstring-Theorie.

Kapitel 2

Klassische Feldtheorie

Das Ziel der Vorlesung ist es, in die störungstheoretische Berechnung von Wirkungsquerschnitten, Lebensdauern von Teilchen usw. im Rahmen der Quantenfeldtheorie einzuführen. Dazu betrachten wir zunächst einmal die *klassische* Feldtheorie. Den Ausgangspunkt stellt der Lagrangeformalismus für Felder dar. Die klassische Feldtheorie findet ihre Anwendungen z.B. in der Hydrodynamik, in der Elektrodynamik und in der allgemeinen Relativitätstheorie. Zunächst einmal ist es notwendig, einige Definitionen und Grundlagen aufzustellen, von denen wir dann ausgehen können.

2.1 Definitionen und Grundlagen

2.1.1 Relativistische Notationen

Ein kontravarianter vierdimensionaler Raum-Zeit-Vektor wird als $x^\mu \equiv (ct, \mathbf{x})$ definiert, wobei der Index μ von 0 bis 3 läuft. Die Zeitkomonente ist durch $x^0 = ct$ und die Raumkomponenten durch x^i mit $i = 1, 2, 3$ gegeben.

Mit der Matrix $g_{\mu\nu}$ bezeichnet man die sog. Minkowski-Metrik, die durch die Komponenten $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ und $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ bestimmt ist.

Einen kovarianten Vektor, definiert als $x_\mu \equiv (ct, -\mathbf{x})$, erhält man aus dem kontravarianten durch Kontraktion mit der Minkowski-Metrik, d.h. $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$, wobei über doppelt vorkommende Indices summiert wird (Einstein'sche Summenkonvention).

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist gegeben durch:

$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Oft schreiben wir einfach a statt a^μ oder a_μ.

Ein Feld ist eine Funktion (bzw. mehrere Funktionen) von x, z.B. das skalare Feld

$\phi(x)$.

Partielle Raum-Zeit-Ableitungen von Feldern werden folgendermaßen abgekürzt: $\partial\phi/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu\phi$ bzw. $\partial\phi/\partial x_\mu \equiv \partial^\mu\phi$. $\partial_\mu\phi$ stellt einen kovarianten Vektor dar, da $\delta\phi = (\partial\phi/\partial x^\mu)\delta x^\mu$ ebenfalls ein Skalar sein soll, falls ϕ ein Skalar ist. Analog ist deshalb $\partial^\mu\phi$ ein kontravarianter Vektor.

Im folgenden werden wir noch öfter den Differentialoperator $\partial_\mu\partial^\mu = (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2) - \nabla^2 \equiv \Box$ brauchen, der auch als d'Alembert-Operator bezeichnet wird.

2.1.2 Natürliche Einheiten

Wir setzen im folgenden $\hbar = c = 1$. Dann können alle hier auftretenden Einheiten als Potenzen der Energieeinheit MeV geschrieben werden. Diese Wahl der Einheiten wird als natürliche Einheiten bezeichnet. Die Umrechnung auf die üblichen Einheiten geschieht einfach durch Multiplikation mit $\hbar = 6.58\times10^{-22}$ MeV s und $\hbar c = 1.97\times10^{-13}$ MeV m.

Als Beispiel betrachten wir den Thomson Streuquerschnitt (Streuung von Photonen an Atomelektronen). Im Falle $\hbar = c = 1$ ist er durch $\sigma = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$ gegeben, wobei $\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet und $m = 0.511$ MeV die Elektronenmasse. In natürlichen Einheiten ist der Thomson Streuquerschnitt durch $\sigma = 1.71 \times 10^{-3}$ MeV^{-2} gegeben. Die Umrechnung auf SI-Einheiten, in denen der Wirkungsquerschnitt die Dimension m^2 hat erfolgt durch Multiplikation mit $(\hbar c)^2$:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\alpha^2\frac{(\hbar c)^2}{m^2} = 6.65 \times 10^{-29}\ \mathrm{m}^2 = 0.665\ \mathrm{barn}.$$

2.1.3 Funktionalableitung

Funktionale oder verallgemeinerte Funktionen sind Funktionen von Funktionen: $F = F[f(x)]$. Beispiele sind: $F_1[f] = f(x)$, $F_2[f] = \int dx f(x)$ und $F_3[f] = \int dx f^2(x)$. (Hierbei ist x eine eindimensionale Koordinate. Die Verallgemeinerung auf vier Dimensionen ist trivial.)

Die Funktionalableitung ist folgendermaßen definiert:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon\to0}\frac{F[f(x)+\epsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon}.$$

Für die obigen Beispiele ergibt sich:

$$\frac{\delta F_1[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon\to0}\frac{f(x)+\epsilon\delta(x-y) - f(x)}{\epsilon} = \delta(x-y),$$

$$\frac{\delta F_2[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int dx[f(x) + \epsilon\delta(x-y)] - \int dx f(x)}{\epsilon} = 1,$$

$$\frac{\delta F_3[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int dx[f(x) + \epsilon\delta(x-y)]^2 - \int dx f^2(x)}{\epsilon} = 2\int dx f(x)\delta(x-y) = 2f(y).$$

Allgemein gilt, wie man durch Taylor-Entwicklung leicht erkennt: Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Funktion von $f(x)$ und $L = \int dx\mathcal{L}$, dann ist die Funktionalableitung von L nach f äquivalent zu einer partiellen Ableitung von $\mathcal{L}$ nach f, $\delta L/\delta f = \partial\mathcal{L}/\partial f$.

Literatur: C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*

2.2 Das skalare Feld

Das skalare Feld ist der einfachste Fall. Im folgenden werden alle Rechnungen für skalare Felder explizit durchgeführt. Die erhaltenen Resultate werden dann auf Spinoren und Vektorfelder ohne explizite Rechnungen übertragen. Bis auf das Higgs-Feld kommen allerdings in der Natur keine elementaren skalaren Felder vor. Jedoch treten sie in effektiven Feldtheorien, wie z.B. das σ-Feld im Walecka-Modell, auf.

Das Ziel ist die Ableitung des Lagrange-Formalismus für Felder. Dazu starten wir von der aus der Mechanik-Vorlesung bekannten Punktmechanik, in der die Koordinate eine Funktion der Zeit ist: $x = x(t)$. Die Lagrange-Funktion ist dann eine Funktion der Koordinate und der Geschwindigkeit: $L = L(x, \dot{x})$. Die Wirkung ist das zeitliche Integral über die Lagrange-Funktion: $S = \int dt L$. Aus der Variation der Wirkung erhält man die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen):

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Der Übergang von der Punktmechanik zu Feldern erfolgt, indem man die Koordinaten durch die Felder $x(t) \to \phi(x)$ und die Geschwindigkeiten durch die Raum-Zeit-Ableitungen $\dot{x}(t) \to \partial_\mu\phi$ ersetzt. Die Lagrangedichte wird dann ein Funktional der Form $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)]$. Die Lagrangefunktion erhält man daraus durch Integration über den Raum, $L = \int d^3x\mathcal{L}$, und die Wirkung wiederum daraus durch Integration über die Zeit, $S = \int dt L = \int d^4x\mathcal{L}$. Die Wirkung ist einheitenlos, so daß die Einheit der Lagrangedichte Länge^{-4}, in natürlichen Einheiten MeV^4, beträgt.

Die Variation von S führt auf die Bewegungsgleichungen, die sich nun als Funktionalableitungen von L bezüglich der Felder und der Raum-Zeit-Ableitungen der Felder und somit als partielle Ableitungen von $\mathcal{L}$ schreiben lassen:

$$\partial_\nu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0. \tag{2.1}$$

Als Beispiel betrachten wir die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \tag{2.2}$$

wobei m die Masse des Feldes bzw. in der quantisierten Version der Feldquanten bezeichnet. Aus (2.2) folgt mit (2.1):

$$m^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_\nu \left[\frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi \frac{\partial(\partial^\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} \right] = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} = \delta^\mu_\nu$$

und

$$\frac{\partial(\partial^\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} = g^{\mu\rho} \frac{\partial(\partial_\rho \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} = g^{\mu\rho} \delta^\rho_\nu = g^{\mu\nu}$$

sind. Hier ist δ^μ_ν die vierdimensionale Einheitsmatrix. Damit erhält man:

$$m^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_\nu \left[\delta^\mu_\nu \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \right] = 0$$

und daraus

$$m^2 \phi + \frac{1}{2} \partial_\nu \left[\partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi \right] = 0$$

und schließlich

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{2.3}$$

Diese Gleichung ist als Klein-Gordon-Gleichung für Felder mit Spin 0 bekannt. Natürlich haben wir die Lagrangedichte (2.2) so gewählt, daß die Bewegungsgleichung mit der Klein-Gordon-Gleichung identisch ist.

An dieser Stelle sind zwei Bemerkungen angebracht:

1. Die Klein-Gordon-Gleichung ist hier als eine rein klassische Gleichung abgeleitet worden.

2. Im Falle $m = 0$ stimmt sie mit der Wellengleichung, die die Ausbreitung freier Wellen beschreibt, überein. Die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt also die klassische Ausbreitung eines skalaren Feldes ohne Wechselwirkung. Allgemein wird sich zeigen, daß freie Bewegungsgleichungen durch lineare Differentialgleichungen gegeben sind. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Lagrangedichten die Felder und die Raum-Zeit-Ableitungen der Felder nur quadratisch enthalten.

Schließlich wollen wir hier noch den kanonisch konjugierten Impuls des Feldes einführen. In der Punktmechanik ist er durch $p = \partial L/\partial \dot{x}$ gegeben. In der Feldtheorie ist er über $\pi(x) \equiv \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi)$ definiert. Die Ableitung erfolgt nicht nach $\partial_\mu\phi$, damit π genau wie ϕ ein Skalar ist. Im Falle der Lagrangedichte (2.2) finden wir

$$\pi(x) = \partial^0\phi(x) = \dot{\phi}(x). \tag{2.4}$$

Wechselwirkungen werden eingeführt, indem man einen Term zur freien Lagrangedichte hinzuaddiert, der höhere Potenzen als quadratische in den Feldern enthält, z.B.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^4. \tag{2.5}$$

λ stellt dabei die sog. Kopplungskonstante, die die Stärke der Wechselwirkung angibt, dar. Daraus erhält man die nicht-lineare Bewegungsgleichung

$$(\Box + m^2)\phi = -4\lambda\phi^3. \tag{2.6}$$

Auf dem klassischen Niveau kann man Wechselwirkungsterme beliebiger Form zur freien Lagrangedichte hinzufügen. In der Quantentheorie dagegen ist die Wahl dieser Terme sehr eingeschränkt, wie wir später (Kap.5) sehen werden.

2.3 Spinoren

Spinorfelder sind Felder, die zu Teilchen mit dem Spin 1/2 gehören, wie z.B. Elektronen. Wir werden sie, wie üblich, mit $\psi(x)$ bezeichnen. Die freie Lagrangedichte für diese Felder lautet:

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{2.7}$$

mit $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$, wobei $\dagger$ klassisch komplex konjugiert, quantenmechanisch adjungiert bedeutet. Die γ-Matrizen erfüllen die sog. Clifford-Algebra:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}.$$

Eine mögliche Darstellung in Form von 4×4-Matrizen ist

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei I die 2×2 Einheitsmatrix und σ_i die drei Paulimatrizen darstellen.

Da $\mathcal{L}$ ein Skalar sein muß, muß ψ vier Komponenten besitzen, die den zwei möglichen Spineinstellungen von Teilchen und Antiteilchen entsprechen.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man durch Variation nach $\bar{\psi}$:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \tag{2.8}$$

Dies ist die Dirac-Gleichung, die hier als klassische Bewegungsgleichnug für Spinoren abgeleitet wurde.

Eine wichtige Tatsache ist die Beobachtung, daß die Lagrangedichte (2.7) invariant unter einer globalen Transformation der Form

$$\psi \to \exp(ie\theta)\psi \tag{2.9}$$

(U(1)-Symmetrie) ist, wobei e die Elementarladung und θ eine beliebige, reelle Konstante ist. Daraus ergibt sich, daß die Ladung

$$Q = e \int d^3x \psi^\dagger(x)\psi(x)$$

erhalten ist, d.h. $\dot{Q} = 0$. Der Beweis dieser Behauptung folgt aus dem Noether-Theorem und sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen (Hinweis: Man leite zunächst die Euler-Lagrange-Gleichung für $\bar{\psi}$ ab und zeige damit, daß sich $\dot{Q}$ als das Volumenintegral über eine Divergenz darstellen läßt. Weiterhin beachte man, daß γ_0^2 gleich der Einheitsmatrix ist.)

2.4 Photonen

Photonen werden durch ein masseloses Vektorfeld oder auch Eichfeld $A_\mu(x)$, das vier Komponenten besitzt, repräsentiert. Die Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.10}$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.11}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung folgt daraus durch Variation nach A_ρ, d.h.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\rho} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} = 0.$$

Damit erhält man aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)$$

die Gleichung

$$\frac{1}{2}\partial_\sigma(2\partial^\sigma A^\rho - 2\partial^\rho A^\sigma) = 0,$$

woraus die Feldgleichung

$$\partial_\sigma F^{\rho\sigma} = 0 \tag{2.12}$$

folgt. Daneben gibt es noch eine weitere Gleichung

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0, \tag{2.13}$$

die eine direkte Konsequenz der Definition des Feldstärketensors (2.11) ist und in der Tensoralgebra als ein Beispiel für sog. Bianchi-Identitäten bekannt ist.

Die Lagrangedichte (2.10) ist invariant unter einer *lokalen* Eichtransformation der Form

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x), \tag{2.14}$$

da $F_{\mu\nu}$ trivialerweise unter dieser Transformation invariant ist. Lokal bedeutet hier, daß die beliebige Größe $\theta(x)$ von x abhängen darf im Gegensatz zum Drehwinkel θ bei der globalen U(1)-Transformation im letzten Abschnitt. Beispielsweise kann man $\theta(x)$ so wählen, daß $\partial_\mu A^\mu = 0$ gilt (Lorentz-Eichung), so daß sich die Feldgleichung (2.12) auf die Wellengleichung $\Box A_\mu = 0$ reduziert.

Im Falle massiver Vektorfelder wird zur Lagrangedichtte (2.10) der Massenterm $-(1/2)m^2 A_\mu A^\mu$ hinzuaddiert. Dann ist allerdings die Eichinvarianz nicht mehr gegeben. Die Eichinvarianz, die Masselosigkeit der Photonen und die Langreichweitigkeit der elektromagnetischen Wechselwirkung hängen also eng miteinander zusammen.

Der Feldstärketensor kann auch durch die elektrischen Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und magnetischen Felder $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ausgedrückt werden:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oder eleganter:

$$E_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0, \tag{2.15}$$

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k \tag{2.16}$$

mit dem Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk}. Dieser ist 1, falls ijk eine gerade Permutation von 123 ist, -1 für eine ungerade Permutation und 0, falls zwei Indices gleich sind. Auf diese Weise erhält man das Vektorprodukt in Tensorschreibweise, z.B.

$$B_1 = \epsilon_{123}\partial_2 A_3 + \epsilon_{132}\partial_3 A_2 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2.$$

In nicht-relativistischer Notation bekommt man aus (2.15) und (2.16) mit dem kovarianten Vektor $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Aus der Feldgleichung (2.12) wird dann

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

was bei Anwesenheit von Quellen und Strömen (s. nächsten Abschnitt) den inhomogenen Maxwellgleichungen entspricht. Aus der Bianchi-Identität (2.13) folgen dagegen die homogenen Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

2.5 Wechselwirkung von Photonen mit Elektronen

Bisher wurden sowohl die Photonen als auch die Elektronen als freie Felder aufgefaßt. Jetzt wollen wir eine Wechselwirkung einführen. Um dies zu erreichen, stellen wir die Forderung nach *lokaler* U(1)-Symmetrie für den Elektronensektor, d.h. die Lagrangedichte der Elektronen soll nun unter der Transformation

$$\psi(x) \to e^{ie\theta(x)}\psi(x)$$

invariant sein, wobei die beliebige Größe θ nun eine Funktion der Raum-Zeit-Koordinate ist. Die Lagrangedichte (2.7) erfüllt diese Bedingung offensichtlich nicht:

$$\mathcal{L}_F \to \bar{\psi}(x)e^{-ie\theta(x)}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{ie\theta(x)}\psi(x) = \mathcal{L}_F - e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu\theta(x).$$

Durch die Einführung eines Wechselwirkungsterms

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

ist die Summe $\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I$ invariant unter der gleichzeitigen lokalen Transformation für ψ, $\bar{\psi}$ und $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta$, da

$$\mathcal{L}_I \to \mathcal{L}_I + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\theta$$

und sich somit die θ-abhängigen Terme in $\mathcal{L}_F$ und $\mathcal{L}_I$ gegenseitig wegheben. Mit anderen Worten, die Forderung nach lokaler Eichinvarianz erzwingt die Einführung einer Wechselwirkung, deren Stärke durch die Ladung e als Kopplungskonstante bestimmt ist.

Kompakt läßt sich die eichinvariante Lagrangedichte als

$$\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{2.17}$$

mit der sog. kovarianten Ableitung $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$ schreiben. Die gesamte eichinvariante Lagrangedichte der Elektrodynamik erhält man durch hinzufügen der Lagrangedichte (2.10) für die Photonen:

$$\mathcal{L}_{ED} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I. \tag{2.18}$$

Durch Variation nach A_μ ergeben sich daraus die inhomogen Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{2.19}$$

mit dem Viererstrom $j^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ der geladenen Fermionenfelder als Quelle des elektromagnetischen Feldes. In nicht-relativistischer Notation: $j^\nu = (\rho, \mathbf{j})$ mit der Elektronendichte $\rho = e\psi^\dagger\psi$.

Aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, gilt

$$\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\nu\mu} = -\partial_\mu\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

woraus die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\nu j^\nu = \dot{\rho} - \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

folgt, die die bereits in Abschnitt 2.3 besprochene Ladungserhaltung, $\dot{Q} =$ mit $Q = \int d^3x\rho$, impliziert. (Die Invarianz unter einer lokalen Eichtransformation bringt gegenüber der globalen Eichinvarianz keine neue Erhaltungsgröße.)

Die Variation nach $\bar{\psi}$ führt auf die Dirac-Gleichung bei Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0. \tag{2.20}$$

Die Gleichungen (2.19) und (2.20) bilden ein gekoppeltes System von nicht-linearen Differentialgleichungen, das die Wechselwirkung zwischen Photonen und Elektronen auf dem klassischen Niveau beschreibt.

2.6 Nicht-abelsche Eichtheorien

Nicht-abelsche Eichtheorien, auch Yang-Mills Theorien gennant, spielen in der modernen Elementarteilchenphysik (QCD, elektroschwache Theorie) eine entscheidende Rolle. Man erhält sie durch Verallgemeinerung der lokalen U(1)-Eichsymmetrie auf SU(N)-Gruppen, die zur Klasse der Lie-Gruppen gehören. Dazu erweitert man den Eichwinkel $\theta(x)$ auf $T_a\theta_a(x)$, wobei über a summiert wird. T_a ist hierbei ein Generator der Gruppe SU(N), d.h. eine hermitesche $N \times N$-Matrix. Im Falle der SU(2) ist er gerade durch die Pauli-Matrizen gegeben: $T_a = (1/2)\sigma_a$, wobei a von 1 bis 3 läuft. Der Spinor $\psi(x)$ ist nun ein N-komponentiger Vektor im Raum der Eichgruppe (fundamentale Darstellung) und geht unter Eichtransformation in $\psi(x) \to U(x)\psi(x)$ über, wobei die unitäre $N \times N$-Matrix $U(x) = \exp(igT_a\theta_a(x))$ ein Element der SU(N) ist und über die Taylorreihe der Exponentialfunktion definiert ist. g ist analog zu e die Ladung bzw. Kopplungskonstante.

Wegen $\det U = 1$ ($U \epsilon$ SU(N)) gibt es $N^2 - 1$ linear unabhängige Matrizen, d.h. a=1,2,...$N^2 - 1$.

Die Vektorfelder sind nun durch $A_\mu = T_a A_\mu^a$ gegeben, d.h. es existieren $N^2 - 1$ Vektorfelder A_μ^a (adjungierte Darstellung). Sie transformieren sich wie

$$A_\mu \to U(A_\mu + \frac{i}{g}\partial_\mu)U^{-1}. \tag{2.21}$$

Im Beispiel der U(1) ist $T_a = 1$ und $U = \exp(ig\theta)$, woraus die bekannte Eichtransformation $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta$ folgt.

Die Generatoren der SU(N) erfüllen die folgenden Relationen

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \qquad T_a = T_a^\dagger, \qquad Sp(T_a) = 0, \qquad Sp(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc}, z.B. Im Fall der SU(2) ist $f_{abc} = \epsilon_{abc}$, so daß die erste Relation den bekannten Drehimpulsvertauschungsrelationen entspricht.

Man geht nun analog zur Elektrodynamik vor und konstruiert zunächst die einfachste Lagrangedichte für die Eichfelder, die unter der Eichtransformation (2.21) invariant ist. Diese lautet

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu},$$

wobei nun allerdings der Feldstärketensor die Form

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

oder

$$F_{\mu\nu} \equiv T_a F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

besitzt. Der Zusatzterm proportional zu g ist notwendig, um die Eichinvarianz zu garantieren. Eine etwas langwierige Rechnung zeigt nämlich, daß dann $F_{\mu\nu} \to U F_{\mu\nu} U^{-1}$ gilt, so daß zwar im Gegensatz zur abelschen Theorie $F_{\mu\nu}$ nicht selbst eichinvariant ist, dafür aber wegen $Sp(AB) = Sp(BA)$ die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2} Sp(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}).$$

Folgende Bemerkungen sind an dieser Stelle von Interesse:

1. Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_A$ enthält im Gegensatz zum abelschen Fall (Photonen) nun kubische und quartische Terme in den Eichfeldern, d.h. die Euler-Lagrange-Gleichungen (verallgemeinerte Maxwellgleichungen) sind nicht-lineare Differentialgleichungen. Das entspricht einer Selbstwechselwirkung der Eichfelder.

2. Die elektrischen und magnetischen Felder $E^a_i = F^a_{0i}$ und $B^a_i = (1/2)\epsilon_{ijk} F^a_{jk}$ sind nicht eichinvariant und somit keine Observablen.

Die vollständige, lokal eichinvariante Lagrangedichte bei Anwesenheit von Fermionen lautet:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Sp(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{2.22}$$

mit der kovarianten Ableitung $D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu$.

Als wichtigstes Beispiel betrachten wir die QCD. Die Quarks kommen in drei Farben vor, so daß eine SU(3)-Eichsymmetrie vorliegt. Das Quarkfeld ψ ist ein $4 \times 3 \times N_F$-komponentiger Spinor, wobei die 4 von den Spineinstellungen von Teilchen und Antiteilchen, die 3 von den Farben und N_F von den möglichen "Flavor"-Zuständen (u, d, s, c, b, t) kommen. m ist eine diagonale $N_F \times N_F$-Matrix mit den verschiedenen Quarkmassen in der Diagonale. Der Farbindex a läuft von 1 bis 8, so daß es acht Generatoren $\lambda_a = 2T_a$ (3×3-Matrizen) gibt, die als Gell-Mann-Matrizen bezeichnet werden. Somit gibt es auch acht Eichfelder, die Gluonen, die selbst miteinander wechselwirken.

Confinement bedeutet nun, daß in der Natur keine farbigen Zustände existieren können, sondern nur Farbsinguletts. (In der Drehimpulsalgebra, die zur Lie-Gruppe SU(2) gehört, würde das Zuständen mit Drehimpuls Null entsprechen.) Die Quarks in den Hadronen müssen nun so gekoppelt werden (SU(3)-Clebsch-Gordan-Koeffizienten), daß nur Farbsinguletts auftreten. Die einfachsten Kombinationen zur Erzeugung von Farbsinguletts ist nun die Kopplung eines Quarks und eines Antiquarks zu einem Meson oder von drei Quarks zu einem Baryon. (Mehr zur Gruppentheorie und ihrer Anwendung in der Elementarteilchenphysik findet sich in W. Greiner, *Quantenmechanik II – Symmetrien.*)

Kapitel 3

Quantisierung von Feldtheorien

Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, klassische Felder zu quantisieren:

1. Die am längsten bekannte Methode ist die kanonische Quantisierung. Dabei wird die in der Quantenmechanik bekannte Vertauschungsrelation von Ort und Impuls, $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ auf die Felder und ihre kanonisch konjugierten Impulse übertragen, die nun als Operatoren angesehen werden: $\hat{x}_i \to \hat{\phi}(x)$ und $\hat{p}_j \to \hat{\pi}(y)$.

2. Die Methode der Quantisierung durch Pfadintegrale, die sowohl in der Quantenmechanik als auch in der Quantenfeldtheorie anwendbar ist, geht auf Feynman zurück. Die Idee ist dabei, daß in der Wirkung nicht nur die klassischen Pfade, die dem Minimum der Wirkung entspechen, sondern auch benachbarte beitragen. Somit werden z.B. Übergangswahrscheinlichkeiten durch Integrale über Pfade (Funktionalintegrale) ausgedrückt.

3. In der sog. stochastischen Quantisierung wird die quantenmechanische Zeitentwicklung eines Feldes durch eine Langevin-Gleichung, die einen Rauschterm zur Berücksichtigung der Quantenfluktuationen enthält, beschrieben.

Hier werden wir uns nur mit der kanonischen Quantisierung befassen, da sie formal am einfachsten ist - sie erfordert keine neuen mathematischen Grundlagen im Gegensatz zur Pfadintegralmethode - und direkt aus der bekannten Quantenmechanik übernommen werden kann. Allerdings hat sie Nachteile bei der Quantisierung von Eichtheorien und auch die Ableitung der Feynman-Regeln ist teilweise komplizierter.

3.1 Das skalare Feld

Die kanonische Quantisierung des skalaren Feldes erfolgt, indem $\phi(x)$ und $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ nun als Operatoren aufgefaßt werden und kanonische Vertauschungsrelationen zu *glei-*

chen Zeiten erfüllen:

$$
\begin{aligned}
&[\phi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\\
&[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] = [\pi(\mathbf{x},t),\pi(\mathbf{y},t)] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Das Feld ϕ soll eine Lösung der *freien* Klein-Gordon-Gleichung sein. Dazu zerlegen wir es in sog. postive und negative Frequenzanteile

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)$$

und entwickeln nach ebenen Wellen (Fourier-Transformation):

$$
\begin{aligned}
\phi^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} a(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x},\\
\phi^{(-)}(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

wobei $k = (k_0, \mathbf{k})$ durch $k_0 = \omega_k \equiv (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}$ gegeben ist, um die Klein-Gordon-Gleichung zu erfüllen:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) e^{\pm i k_\nu x^\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -k_\mu k^\mu + m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_0^2 = \mathbf{k}^2 + m^2.$$

Die Fourierkoeffizienten (zweckmäßigerweise wurde der Faktor $1/(2\omega_k)^{1/2}$ herausgezogen) sind nun Operatoren mit Vertauschungsrelationen

$$
\begin{aligned}
&[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\
&[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

(Die Ableitung dieser Relationen aus (3.1) und (3.2) stellt eine gute Übung dar.) Die Gleichungen (3.3) stellen gerade die Vertauschungsrelationen für die Auf- und Absteigeoperatoren eines harmonischen Oszillators mit unendliche vielen, kontinuierlichen Freiheitsgraden (statt einem Kronecker-Symbol auf der rechten Seite steht eine δ-Funktion) dar. Daraus erkennt man, daß skalare Teilchen genau wie Phononen Bosonen sind. $a(\mathbf{k})$ wird als Vernichtungsoperator bezeichnet, der die Anzahl der Bosonen in einem Zustand um das Boson mit dem Impuls $\mathbf{k}$ verringert und insbesondere den Vakuumzustand definiert:

$$a(\mathbf{k})|0\rangle = 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{k}.$$

$a^\dagger(\mathbf{k})$ ist der Erzeugungsoperator, der durch wiederholte Anwendung auf das Vakuum Zustände mit beliebig vielen Bosonen konstruiert

$$|n\rangle = |n_1(\mathbf{k_1}), n_2(\mathbf{k_2}), ...\rangle = \prod_i \frac{[a^\dagger(\mathbf{k_i})]^{n_i(\mathbf{k_i})}}{\sqrt{n_i(\mathbf{k_i})!}} |0\rangle$$

mit Energie

$$E_n = \sum_i \left(\omega_{k_i} n_i(\mathbf{k_i}) + \frac{1}{2} \right).$$

Nun wollen wir uns überlegen, wie die Vertauschungsrelationen bei ungleichen Zeiten aussehen. Aus (3.3) folgt für beliebige x_0 und y_0, daß

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)] = [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)] = 0.$$

Das bedeutet, daß

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)].$$

Mittels (3.3) findet man

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k d^3k' \frac{1}{(\omega_k \omega_{k'})^{1/2}} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(k \cdot x - k' \cdot y)} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{\omega_k} e^{-ik\cdot(x-y)} \quad \text{mit} \quad k_0 = \omega_k. \end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir die Funktion $\Delta(x)$:

$$\Delta^+(x) \equiv \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} e^{-ik\cdot x} \quad \text{mit} \quad k_0 = \omega_k. \tag{3.4}$$

Damit gilt:

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] = i\Delta^+(x-y).$$

Analog läßt sich leicht zeigen, daß

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] = -i\Delta^+(y-x) \equiv i\Delta^-(x-y).$$

Damit erhält man insgesamt:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y)$$

mit

$$\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_k} \sin(k \cdot x). \tag{3.5}$$

Die Funktion $\Delta(x)$ hat folgende interessante Eigenschaften:

1. $\Delta(x)$ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung, d.h. $(\Box_x + m^2)\Delta(x-y) = 0$.

2. $\Delta(x-y) = 0$ für $x_0 = y_0$, da der Integrand in (3.5) für $x_0 = 0$ eine ungerade Funktion von $\mathbf{k}$ ist. Dies entspricht gerade der gleichzeitigen Vertauschungsrelation (3.1).

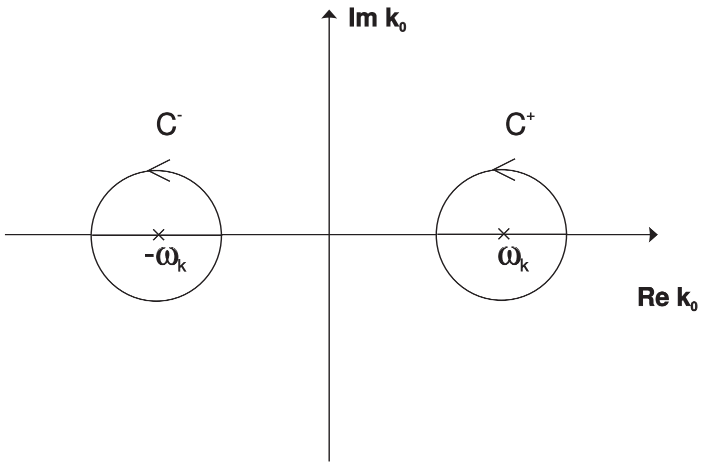


Abbildung 3.1:

3. Weiterhin gilt $\Delta(x-y)=0$ für $(x-y)^2<0$, d.h. für sog. raumartige Abstände, über die sich ein Signal nicht ausbreiten kann, da dazu Überlichtgeschwindigkeit wegen $(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 > (x_0-y_0)^2$ notwendig wäre. Dies wird als Mikrokausalität bezeichnet. Der Beweis der Behauptung folgt daraus, daß $\Delta(x-y)$ Lorentzinvariant ist und man durch Lorentztranformation von der Geraden $x_0=y_0$, wo $\Delta(x-y)$ verschwindet, jedes $(x-y)^2<0$ erreichen kann.

Die Lorentzinvarianz von (3.5) wird offensichtlich, indem man $\Delta^{\pm}(x)$ durch ein Kontourintegral in der komplexen k_0-Ebene ausdrückt:

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int_{C^{\pm}} d^4k \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2-m^2}. \tag{3.6}$$

Die Kontouren $C^{\pm}$ sind in Abb.3.1 dargestellt.

Der Beweis von (3.6) erfolgt mit Hilfe des Residuensatzes:

Der Integrand in (3.6) hat einfache Pole bei $k_0=\pm\omega_k$. Das Residuum ist bei $k_0=\omega_k$ durch

$$Res\left[\frac{e^{-ik_0x_0}}{k_0^2-\omega_k^2},\omega_k\right] = \frac{e^{-i\omega_k x_0}}{2\omega_k}$$

gegeben. Nach dem Residuensatz erhält man dann

$$\int_{C^{\pm}} dk_0 \frac{e^{-ik_0x_0}}{k^2-m^2} = 2\pi i \frac{e^{-i\omega_k x_0}}{2\omega_k}$$

und somit aus (3.6) die Funktion $\Delta^+(x)$ in (3.4). Analog geht der Beweis für $\Delta^-(x)$.

Nun führen wir den *Propagator*, eine der zentralen Größen der Quantenfeldtheorie, ein. Seine herausragende Bedeutung wird im nächsten Kapitel offensichtlich werden.

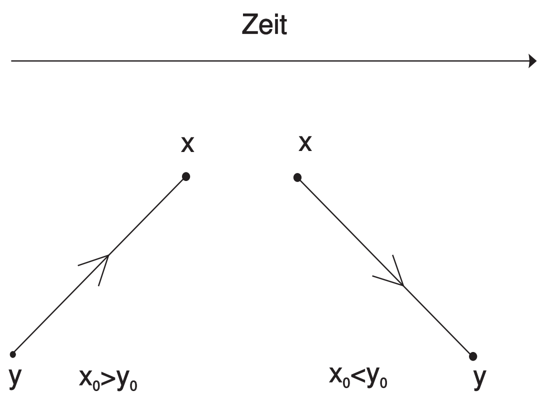


Abbildung 3.2:

Dazu bemerken wir zunächst, daß $\Delta^+(x)$ als Vakuumserwartungswert von Produkten zweier Feldoperatoren geschrieben werden kann. Wegen $\langle 0|0\rangle = 1$ und der Tatsache, daß Δ^+ eine komplexe Zahl und kein Operator ist, gilt nämlich:

$$\begin{aligned} i\Delta^+(x-y) &= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] \\ &= \langle 0|[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]|0\rangle \\ &= \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) - \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x)|0\rangle \\ &= \langle 0|\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)|0\rangle \\ &= \langle 0|(\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y)+\phi^{(-)}(y))|0\rangle \\ &= \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Hierbei wurde mehrfach $\phi^{(+)}|0\rangle = \langle 0|\phi^{(-)} = 0$ (s. (3.2)) angewandt. Analog gilt:

$$i\Delta^-(x-y) = -\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle.$$

Als nächstes definieren wir das sog. zeitgeordnete Produkt zweier Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} T\{\phi(x)\phi y)\} &= \begin{cases} \phi(x)\phi(y) & x_0 > y_0 \\ \phi(y)\phi(x) & x_0 < y_0 \end{cases} \\ &= \theta(x_0 - y_0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y_0 - x_0)\phi(y)\phi(x) \end{aligned} \tag{3.8}$$

mit der Stufenfunktion $\theta(x) = 1$ für $x > 0$ und $\theta(x) = 0$ für $x < 0$.

Nun definieren wir den Feynman-Propagator als den Vakuumserwartungswert des zeitgeordneten Produkts zweier Feldoperatoren:

$$i\Delta_F(x-y) \equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \theta(x_0-y_0)\Delta^+(x-y) - \theta(y_0-x_0)\Delta^-(x-y). \tag{3.9}$$

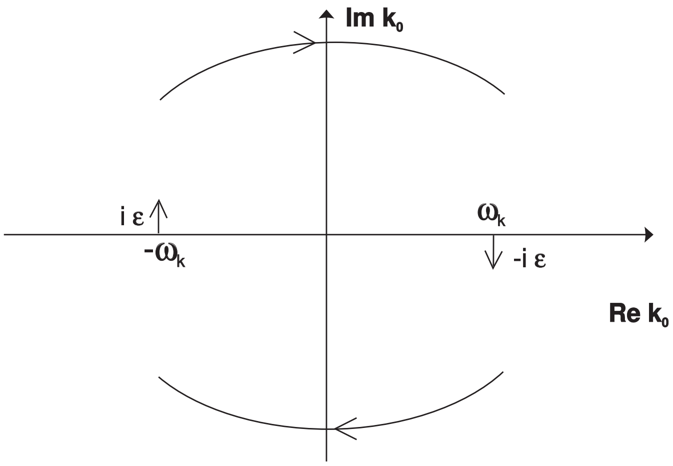


Abbildung 3.3:

Den Feynmanpropagator können wir folgendermaßen veranschaulichen: Für $x_0 > y_0$ wird ein skalares Teilchen gemäß $\phi^{(-)}(y)|0\rangle$ bei y produziert. Es propagiert dann nach x und wird dort wegen $\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)|0\rangle$ vernichtet. Für $x_0 < y_0$ wird das Teilchen bei x erzeugt und bei y vernichtet. Dies ist in Abb.3.2 graphisch darstellt.

Der Feynman-Propagator kann ebenfalls durch ein komplexes Integral ausgedrückt werden:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{3.10}$$

Der infintesimale Term $i\epsilon$ schiebt dabei die Pole von der rellen k_0-Achse weg, so daß entlang dieser Achse integriert werden kann, ohne die Pole umgehen zu müssen. Aufgrund der Exponentialfunktion $\exp(-ik_0x_0)$ in (3.10) kann die Kontour in der komplexen Ebene im Unendlichen geschlossen werden. Für $x_0 > 0$, entsprechend dem Beitrag Δ^+, muß dabei die Kontour in der unteren Halbebene geschlossen werden, da für $k_0 \to -i\infty$ die Exponentialfunktion verschwindet ($\exp(-ik_0x_0) \to 0$), für $x_0 < 0$, entsprechend Δ^-, in der oberen Halbebene (s. Abb.3.3).

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß der Feynman-Propagator die Green'sche Funktion der Klein-Gordon Gleichung ist:

$$\begin{aligned}(\Box + m^2)\Delta_F(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}(\Box + m^2)e^{-ik\cdot x} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 + m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik\cdot x} \\ &= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot x} = -\delta^{(4)}(x).\end{aligned}$$

3.2 Spinoren

Aus Abschnitt 2.3 wissen wir, daß die freie Lagrangedichte für Spinoren

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

lautet. Der kanonisch konjugierte Impuls zu ψ ist somit gegeben durch

$$\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\bar{\psi}_\alpha \gamma_0 = i\psi^\dagger_\alpha {\gamma_0}^2 = i\psi^\dagger_\alpha,$$

wobei der Spinor-Index α von 1 bis 4 läuft.

Um das Pauli-Prinzip zu erfüllen (s.u.), fordern wir nun *Anti*vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten:

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

bzw.

$$\begin{aligned} &[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ &[\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = [\psi^\dagger_\alpha(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger_\beta(\mathbf{y}, t)]_+ = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir gehen analog zu den skalaren Feldern vor und entwickeln zunächst die Spinoren als Lösungen der freien Dirac-Gleichung nach ebenen Wellen:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x) \\ &= \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2E_p)^{1/2}} \left[c_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + d^\dagger_s(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x} \right] \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2E_p)^{1/2}} \left[d_s(\mathbf{p}) \bar{v}_s(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x} + c^\dagger_s(\mathbf{p}) \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x} \right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $p_0 = E_p \equiv (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$.

Die orthogonalen vierkomponentigen Spinoren im Impulsraum $u_s(\mathbf{p})$ und $v_s(\mathbf{p})$ (s. Anhang), wobei s die beiden Spineinstellungen angibt, erfüllen die folgenden Gleichungen, wie man durch Anwendung der Diracgleichung (2.8) auf (3.12) erkennt:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m) u_s(\mathbf{p}) &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu + m) v_s(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Daraus liest man ab, daß u_s Teilchen und v_s Anti-Teilchen (Lösungen mit negativer Energie) beschreiben. Entsprechend erzeugt $c^\dagger_s$ bzw. vernichtet c_s ein Elektron und $d^\dagger_s$ erzeugt bzw. d_s vernichtet ein Positron.

Die Erzeugungs-und Vernichtungsoperatoren erfüllen die folgenden Antivertauschungsrelationen, die sich durch Einsetzen von (3.12) in (3.11) ergeben:

$$[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = [d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{rs}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \tag{3.14}$$

Alle anderen Antikommutatoren verschwinden, z.B.

$$[c_r^\dagger(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = 0. \tag{3.15}$$

Das Vakuum ist bestimmt durch

$$c_s(\mathbf{p})|0\rangle = d_s(\mathbf{p})|0\rangle = 0. \tag{3.16}$$

Einteilchenzustände sind durch $c_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ (Elektronen) bzw. $d_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ (Positronen) gegeben. Mehrteilchenzustände ergeben sich wieder durch wiederholte Anwendung der Erzeuger, z.B. ein Zwei-Elektronen-Zustand

$$c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle. \tag{3.17}$$

Aus (3.15) und (3.17) folgt insbesondere für $r = s$ und $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$, daß

$$[c_r^\dagger(\mathbf{p})]^2|0\rangle = 0,$$

d.h. zwei Elektronen können nicht im selben Zustand vorkommen (Pauli-Prinzip). Die Art der Vertauschungsrelationen (Kommutatoren oder Antikommutatoren) legt somit die Spin-Statistik (Bose- oder Fermi-Statistik) fest.

Als nächstes wollen wir den Fermionpropagator ableiten, indem wir wieder analog zum skalaren Feld vorgehen. Dazu betrachten wir die Antivertauschungsrelationen zu beliebigen Zeiten. Aus den Antivertauschungsrelationen für die Erzeuger und Vernichter (3.14) und (3.15) folgt, daß

$$[\psi(x), \psi(y)]_+ = [\bar\psi(x), \bar\psi(y)]_+ = 0.$$

Den nicht-verschwindenden Antikommutator bezeichnen wir mit

$$iS(x-y) \equiv [\psi(x), \bar\psi(y)]_+.$$

Es kann gezeigt werden, daß

$$S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta(x).$$

Um diesen Zusammenhang zu zeigen, setze man (3.12) in den Antikommutator ein und benutze die im Anhang angegebenen Beziehungen $\sum_s u_s(\mathbf{p})\bar{u}_s(\mathbf{p}) = \gamma^\mu p_\mu + m$ und $\sum_s v_s(\mathbf{p})\bar{v}_s(\mathbf{p}) = \gamma^\mu p_\mu - m$.

Nun führen wir das zeitgeordnete Produkt für zwei Fermionoperatoren ein:

$$T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & x_0 > y_0 \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x) & x_0 < y_0 \end{cases}. \tag{3.18}$$

Das Minuszeichen tritt dabei wegen der Antivertauschungsrelationen auf.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der Feynman-Propagator für Elektronen $S_F(x-y) \equiv \langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ durch

$$S_F(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}e^{-ip\cdot x} \tag{3.19}$$

gegeben ist. Den Feynman-Propagator für Fermionen können wir uns wieder dadurch veranschaulichen, daß wir das auftretende Matrixelement betrachten: Für $x_0 > y_0$ lautet es $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \sim \langle 0|cc^\dagger|0\rangle$, so daß ein Elektron von y nach x propagiert, für $x_0 < y_0$ läuft entsprechend $\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle \sim \langle 0|dd^\dagger|0\rangle$ ein Positron von x nach y. Positronen werden zum Unterschied von Elektronen dadurch gekennzeichnet, daß der Pfeil an der entsprechenden Linie entgegen der Zeit läuft.

3.3 Photonen

Die Lagrangedichte für Photonen ist gegeben durch (2.10):

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu). \tag{3.20}$$

Daraus findet man den kanonisch konjungierten Impuls zu A_μ:

$$\Pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\dot{A}_\mu} = -(\partial_0 A_\mu - \partial_\mu A_0). \tag{3.21}$$

Die Quantisierung erfolgt wieder durch Vertauschungsrelationen, da es sich bei Photonen um Bosonen handelt:

$$[A_\mu(\mathbf{x},t), \Pi_\nu(\mathbf{y},t)] = ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.22}$$

Dabei tritt allerdings ein Problem auf: Die Vertauschungsrelation (3.22) kann nicht für $\mu = \nu = 0$ erfüllt werden, da $\Pi_0 = 0$ nach (3.21). Dieses Problem kann umgangen werden, indem man die Lagrangedichte modifiziert. Statt (3.20) gehen wir von

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu \tag{3.23}$$

aus. Der kanonisch konjugierte Impuls, der daraus folgt, lautet $\Pi_\mu = -\dot{A}_\mu$, dessen Zeitkomponente nicht verschwindet, $\Pi_0 = -\dot{A}_0 \neq 0$, so daß jetzt die Quantisierung möglich ist.

(3.23) ist äquivalent zu

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \tag{3.24}$$

wie man durch Addition eines totalen Differentials, wodurch sich die Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}_A$ nicht ändert, der Form $-(1/2)\partial_\mu(\partial^\nu A_\nu A^\mu)$ zu (3.23) und anschließender partieller Integration sieht.

Aus (3.23) bzw. (3.24) ergibt sich die Wellengleichung $\Box A_\mu = 0$ als Euler-Lagrange-Gleichung. Die Wellengleichung folgt aus der ursprünglichen Lagrangedichte (3.20), wenn man die Eichung so wählt, daß die Lorentz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ erfüllt ist. Die Lagrangedichten (3.23) und (3.24) sind nicht eichinvariant, sondern hier wurde die Eichung schon festgelegt, nämlich die Lorentz-Eichung, in der Feldtheorie auch Feynman-Eichung genannt. Der Term $-(1/2)(\partial_\mu A^\mu)^2$ heißt deshalb eichfixierender Term. Andere Eichungen entsprechen anderen eichfixierenden Termen, z.B. die (nicht-Lorentzinvariante) Coulomb-Eichung mit dem eichfixierenden Term $(\nabla \cdot \mathbf{A})^2$. Zur Quantisierung muß also eine bestimmte Eichung gewählt werden.

Dazu gehen wir wieder analog zum skalaren Feld vor und bemerken, daß die Wellengleichung, die das Vektorfeld erfüllen soll, einer Klein-Gordon-Gleichung mit Masse Null für jede Komponente des Vektorfeldes entspricht. Deshalb entwickeln wir das Photonenfeld nach ebenen Wellen folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) \\ &= \sum_{r=0}^{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega_k)^{1/2}} \left[\epsilon_\mu^r(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x} + \epsilon_\mu^r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x}\right], \end{aligned} \tag{3.25}$$

wobei $k_0 = \omega_k = |\mathbf{k}|$.

Die Polarisationsvektoren $\epsilon_\mu^r(\mathbf{k})$ bilden ein orthonormales System und können folgendermaßen gewählt werden:

$$\epsilon_\mu^0 = (1,0,0,0), \qquad \epsilon_\mu^r = (0, \vec{\epsilon}_r(\mathbf{k})) \quad \text{für} \quad r = 1,2,3,$$

wobei die longitudinale Polarisation durch

$$\vec{\epsilon}_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

und die transversalen durch

$$\mathbf{k} \cdot \vec{\epsilon}_r(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2$$

bestimmt sind.

Die Vertauschungsrelationen für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind gegeben durch

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \xi_r \delta_{rs} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{3.26}$$

(keine Summation über r) mit $\xi_r = 1$ für $r = 1, 2, 3$ und $\xi_0 = -1$. Alle anderen Kommutatoren verschwinden.

Der Photonpropagator, definiert als

$$iD_F^{\mu\nu}(x - y) \equiv \langle 0 | T\{A^\mu(x) A^\nu(y)\} | 0 \rangle,$$

lautet

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \lim_{m \to 0} [-g^{\mu\nu} \Delta_F(x)] = -g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot x}}{k^2 + i\epsilon}. \tag{3.27}$$

Dies ergibt sich direkt durch Vergleich mit dem skalaren Propagator, wenn man den kanonisch konjugierten Impuls in Feynman-Eichung $\Pi_\mu = -\dot{A}_\mu$ in (3.22) einsetzt. Man sieht, daß sich die Photonen von den skalaren Teilchen nur durch den Faktor $-g^{\mu\nu}$ unterscheiden. Die Ableitung des Propagators in beiden Fällen ist deshalb bis auf diesen Faktor identisch. D.h. aber auch, daß der Propagator (3.27) in dieser Form nur in der Feynman-Eichung gilt und in anderen Eichungen anders aussieht. Er ist damit keine eichinvariante Größe und somit auch keine Observable.

Nun taucht aber ein neues Problem auf: Betrachten wir den Kommutator

$$[\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(y)] = i\partial_\mu D^{\mu\nu}(x - y),$$

so verschwindet die linke Seite wegen der Lorentz-Bedingung im Gegensatz zur rechten Seite, d.h. die Lorentz-Bedingung und die Vertauschungsrelationen sind doch nicht kompatibel. Dieses Problem kann man beseitigen, indem man die Lorentz-Bedingung in der Quantentheorie nicht als Operatoridentität (A_μ ist ja jetzt ein Operator), sondern nur im Erwartungswert mit physikalischen Zuständen $|\Psi\rangle$ fordert (Gupta-Bleuler-Vorschrift):

$$\langle \Psi | \partial^\mu A_\mu | \Psi \rangle = 0 \tag{3.28}$$

bzw., was äquivalent dazu ist, $\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\Psi\rangle = 0$. Aus (3.25) folgt damit

$$k_\mu \epsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) |\Psi\rangle \quad \Rightarrow (k_0 a_0 - |\mathbf{k}| a_3) |\Psi\rangle = 0.$$

Für reale Photonen, für die $k_0 = |\mathbf{k}|$ gilt, bedeutet das, daß

$$(a_0 - a_3)|\Psi\rangle = 0. \tag{3.29}$$

Als physikalische Zustände sind demnach nur solche Zustände zulässig , in denen sich die longitudinalen und zeitlichen Photonen gegenseitig eliminieren. Z.B. verschwindet $\langle\Psi|a_3^\dagger a_3 - a_0^\dagger a_0|\Psi\rangle$ wegen (3.29) und der dazu adjungierten Beziehung, d.h. im Energieerwartungswert tragen die longitudinalen und zeitlichen Photonen nicht bei. Dasselbe gilt für alle anderen Observablen. Mit anderen Worten, nur die transversalen Photonen tragen in Erwartungswerten von Observablen bei. Das stimmt mit der Beobachtung überein, daß reale Photonen nur in zwei transversalen Polarisationen auftreten. Der Grund dafür liegt darin, daß Photonen masselos sind. Ein massives Vektorfeld dagegen besitzt drei mögliche Polarisationen (Spin 1). Das Problem bei der Quantisierung ist einfach, daß das Vektorfeld A_μ vier Freiheitsgrade ($\mu = 0, 1, 2, 3$) besitzt, von denen aber nur zwei physikalisch sind.

Eine andere Möglichkeit zur Beseitigung der überzähligen Freiheitsgrade ist die Einführung eines skalaren, antikommutierenden Hilfsfeldes (sog. Geister), welches die unphysikalischen longitudinalen und zeitlichen Photonen eliminiert. In der QED entkoppeln die Geister von den Photonen. Das gilt aber nicht mehr in nicht-abelschen Eichtheorien wie der QCD. Dort ist die Quantisierung wesentlich komplizierter. Die einzige Änderung für den Gluonpropagator gegenüber dem Photonpropagator ist jedoch nur ein trivialer Farbfaktor:

$$D^{\mu\nu}_{F\,ab}(x) = \delta_{ab} D^{\mu\nu}_F(x) \quad (a, b = 1, 2, ..., 8). \tag{3.30}$$

Kapitel 4

Störungstheorie

Das Ziel dieses Kapitels ist die Ableitung von Regeln, sog. Feynman-Regeln, zur Berechnung von Übergangsmatrixelementen, aus denen Wirkungsquerschnitte, Lebensdauern etc. berrechnet werden können. Das Problem besteht darin, daß die gekoppelten, nichtlinearen, quantisierten Feldgleichungen bisher nur approximativ gelöst werden können. Die hierzu am weitesten entwickelte Methode ist die (zeitabhängige) Störungstheorie. Dabei wird der nicht-lineare Wechselwirkungsterm als kleine Störung betrachtet. Dies sollte gelten, falls die Kopplungskonstante klein ist, wie z.B. in der QED, wo $\alpha = e^2/(4\pi) = 1/137 \ll 1$ ist. In der QCD hingegen ist die Verwendung der Störungstheorie fragwürdig, da die starke Kopplungskonstante $\alpha_s = g^2/(4\pi) \simeq 0.1$ - 2 nicht klein ist. (Auf die Frage der Konvergenz der Störungsreihe, selbst im Fall beliebig kleiner Kopplungkonstanten, werden wir nicht eingehen.)

4.1 S-Matrix-Entwicklung

4.1.1 Bilder der Quantenmechanik

Ausgangspunkt für die störungstheoretische Berrechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten in der Quantenfeldtheorie ist das sog. *Wechselwirkungs-* oder *Dirac-Bild*. Um dieses einzuführen, wiederholen wir zunächst die bekannten Bilder der Quantenmechanik:

1. Im *Schrödinger-Bild* wird die Zeitabhängigkeit von den Zuständen $|\Phi(t)\rangle_S$ getragen. Die Operatoren O_S sind zeitunabhängig. Die Zeitentwicklung der Zustände folgt aus der Schrödinger-Gleichung:

$$i\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle_S = H|\Phi(t)\rangle_S. \tag{4.1}$$

die formale Lösung lautet $|\Phi(t)\rangle_S = U|\Phi(t_0)\rangle_S$ mit dem unitären Zeitentwicklungsoperator

$$U = U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \tag{4.2}$$

2. Das *Heisenberg-Bild* erhält man aus dem Schrödinger-Bild durch die unitäre Transformation (4.2) der Zustände und Operatoren

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_H &\equiv U^\dagger |\Phi(t)\rangle_S \\ O_H(t) &\equiv U^\dagger O_S U \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Zustände sind somit zeitunabhängig, die Operatoren zeitabhängig. Aus (4.3) folgt erstens, daß der Hamiltonoperator $H_H = H_S \equiv H$ in beiden Bildern derselbe ist, und zweitens, daß Erwartungswerte unabhängig von der Darstellung sind:

$${}_S\langle\Phi'(t)|O_S|\Phi(t)\rangle_S =_H \langle\Phi'|O_H(t)|\Phi\rangle_H.$$

Durch Differenzieren von (4.3) bezüglich der Zeit bekommt man die Heisenberg-Gleichung, die die Zeitentwicklung der Operatoren beschreibt:

$$i\frac{d}{dt}O_H(t) = [O_H(t), H]. \tag{4.4}$$

3. Das *Dirac-Bild* erhält man aus dem Schrödinger-Bild, indem man den Hamiltonoperator in einen freien und einen Wechselwirkungsanteil zerlegt, $H = H_0 + H_I$, und eine unitäre Transformation mit Hilfe des freien Hamiltonoperators durchführt,

$$U_0 = U_0(t, t_0) \equiv e^{-iH_0(t-t_0)}. \tag{4.5}$$

Dann sind die Zustände im Dirac-Bild durch

$$|\Phi(t)\rangle_D \equiv U_0^\dagger |\Phi(t)\rangle_S \tag{4.6}$$

und die Operatoren durch

$$O_D(t) \equiv U_0^\dagger O_S U_0 \tag{4.7}$$

definiert. Insbesondere der Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H_0^D = H_0^S \equiv H_0, \qquad H_I^D(t) = U_0^\dagger H_I^S U_0.$$

Durch Differenzieren von (4.7) bezüglich t findet man die Zeitentwicklungsgeichung für die Operatoren

$$i\frac{d}{dt}O_D(t) = [O_D(t), H_0] \tag{4.8}$$

und durch Einsetzen von (4.6) in (4.1) die Gleichung für die Zustände

$$i\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle_D = H_I^D(t)|\Phi(t)\rangle_D. \tag{4.9}$$

Im folgenden werden wir den Index D weglassen, da wir nur noch im Dirac-Bild arbeiten werden.

4.1.2 Hamiltonoperator

Bisher haben wir es vermieden, eine Hamiltonfunktion bzw. einen Hamiltonoperator einzuführen. Nun wollen wir aber zur Beschreibung der Zeitentwicklung der quantisierten Felder von (4.9) aus starten. Dazu brauchen wir den Hamiltonoperator. Analog zur klassischen Mechanik erhalten wir die Hamiltondichte, hier für skalare Felder, aus

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{4.10}$$

und daraus die Hamiltonfunktion $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$.

Als Beispiel betrachten wir die ϕ^4-Theorie mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \lambda\phi^4$$

und kanonisch konjugiertem Impuls $\pi = \dot{\phi}$. Die Hamiltondichte lautet

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4$$

Dazu merken wir folgendes an:

1. Im Gegensatz zu $\mathcal{L}$ ist $\mathcal{H}$ nicht Lorentzinvariant.

2. Der Wechselwirkungsterm von Lagrangedichte und Hamiltondichte stimmen abgesehen vom Vorzeichen überein, d.h. $\mathcal{H} = -\mathcal{L}$, falls der Wechselwirkungsterm keine Zeitableitungen enthält, z.B. in der ϕ^4-Theorie, $\mathcal{H}_I = \lambda\phi^4$, und in der QED, $\mathcal{H}_I = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$.

3. Durch Substitution von (3.2) in die freie skalare Hamiltondichte

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

ergibt sich

$$\mathcal{H}_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_k \left[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}\right], \tag{4.11}$$

was einem harmonischen Oszillator mit unendlich vielen, kontinuierlichen Freiheitsgraden entspricht.

4. Die Reihenfolge der Felder ist klassisch nicht festgelegt im Gegensatz zur Quantentheorie, in der die Felder Operatoren sind. Deshalb hat man bei der Wahl des Hamiltonoperators gewisse Freiheiten, die wir weiter unten noch ausnutzen werden.

4.1.3 S-Matrix

Nun kommen wir zur sog. *S-Matrix*. Im folgenden interessieren wir uns nur für Streuprozesse, nicht für gebundene Zustände. Z.B. werden wir die Streuung von zwei Elektronen aneinander studieren, aber nicht das Spektrum des Positroniums. Bei Streuungen können wir annehmen, daß die Teilchen zur Zeit $t = -\infty$ weit voneinander entfernt sind und nichts voneinander spüren. Das System befindet sich dann im Anfangszustand

$$|\Phi(-\infty)\rangle \equiv |i\rangle. \tag{4.12}$$

Bei $t = \infty$ ist die Streuung abgeschlossen, und die Teilchen sind wieder weit voneinander entfernt. Dieser Zustand wird mit $|\Phi(\infty)\rangle$ bezeichnet. Die S-Matrix verknüpft nun $|i\rangle$ mit $|\Phi(\infty)\rangle$:

$$|\Phi(\infty)\rangle = S|i\rangle. \tag{4.13}$$

Eine Kollision kann auf verschiedene Endzustände führen, die in $|\Phi(\infty)\rangle$ enthalten sind. Z.B. kann der Endzustand bei einer Elektron-Elektron-Streuung entweder aus zwei Elektronen bestehen (elastische Streuung), oder weitere Teilchen können auftreten wie z.B. ein Photon (Bremsstrahlung). Die Übergangswahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t = \infty$ in einem *bestimmten* Endzustand $|f\rangle$ zu finden, ist

$$|\langle f|\Phi(\infty)\rangle|^2 \quad \text{mit} \quad \langle f|\Phi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle.$$

Um S zu berechnen, müssen wir die Zeitentwicklungsgleichung (4.9) mit der Anfangsbedingung (4.12) lösen. Dazu schreiben wir (4.9) ähnlich wie in der nicht-relativistischen Streutheorie zunächst in eine Integralgleichung um:

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle - i\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1)|\Phi(t_1)\rangle. \tag{4.14}$$

Diese Gleichung kann iterativ gelöst werden, was zu einer Entwicklung in Potenzen von H_I führt. Dies Entwicklung ist dann sinnvoll, falls die Störung H_I schwach ist. Das hier beschriebene Verfahren ist äquivalent zur zeitabhängigen Störungstheorie. Man bekommt auf diese Weise aus (4.14)

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i)\int_{-\infty}^{t} dt_1 H_I(t_1)|i\rangle \\ &+ (-i)^2\int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)|i\rangle + ... \end{aligned} \tag{4.15}$$

Aus (4.13) folgt daraus die S-Matrix für $t = \infty$:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1)H_I(t_2)...H_I(t_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2)...H_I(t_n)\}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei

$$T\{O_1(x_1)O_2(x_2)...O_n(x_n)\} = \epsilon_P O_{p_1}(x_{p_1})O_{p_2}(x_{p_2})...O_{p_n}(x_{p_n})$$

mit $t_{p_1} > t_{p_2} > ... > t_{p_n}$ und $\epsilon_P = 1$ für Bosonen bzw. $\epsilon_P = (-1)^P$, falls eine P-fache Vertauschung von Fermionoperatoren notwendig ist, um die Zeitordnung zu erzielen. Der letzte Schritt in (4.15) ist nicht trivial. Auf seine Ableitung werden wir hier allerdings verzichten. Die dazu notwendigen mathematischen Umformungen können z.B. in Schweber, Bethe, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, gefunden werden. Es wurde dabei vorausgesetzt, daß H_I eine gerade Anzahl an Fermionoperatoren besitzt, wie es z.B. in der QED der Fall ist, da sonst zusätzliche Faktoren -1 auftreten. Schließlich wollen wir die S-Matrix noch in der Form

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(t_1)\mathcal{H}_I(t_2)...\mathcal{H}_I(t_n)\} \tag{4.17}$$

schreiben.

4.1.4 Normalordnung und Wick'sches Theorem

Die Berechnung der Matrixelemente $\langle f|S|i\rangle$ kann sehr erleichtert werden, indem man alle Vernichtungsoperatoren nach rechts und alle Erzeugungsoperatoren nach links bringt. Dies wird als *Normalordnung* bezeichnet. Als Beispiel betrachten wir zwei skalare Felder in Normalordnung, die durch : ... : gekennzeichnet wird:

$$\begin{aligned}
&: \phi(x)\phi(y) :=: (\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)) : \\
&=: \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) : + : \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) : + : \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) : + : \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) : \\
&= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y),
\end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei die Normalordnung nur im zweiten Term zum Tragen kommt, da wegen $\phi^{(+)} \sim a$ und $\phi^{(-)} \sim a^\dagger$ alle anderen Terme schon normalgeordnet sind. Für Fermionen unterscheidet sich die Normalordnung durch ein Vorzeichen aufgrund der Antivertauschungsrelationen

$$: \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) := \psi_\alpha^{(+)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y) - \psi_\beta^{(-)}(y)\psi_\alpha^{(+)}(x) + \psi_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(+)}(y) + \psi_\alpha^{(-)}(x)\psi_\beta^{(-)}(y). \tag{4.19}$$

Von Bedeutung für die Auswertung von Erwartungswerten ist die Tatsache, daß Vakuumserwartungswerte von normalgeordneten Produkten von Operatoren verschwinden, $\langle 0| : ... : |0\rangle = 0$, da entweder ein Vernichtungsoperator auf das Vakuum nach rechts oder ein Erzeuger nach links (adjungierter Zustand) wirkt.

Wie wir schon erwähnt haben, ist auf dem klassischen Niveau die Reihenfolge der Felder bzw. ihrer Frequenzanteile nicht festgelegt. Beim Übergang von der klassischen Physik zur Quantentheorie können wir deshalb den Hamiltonoperator in Normalordnung wählen. Dadurch vermeiden wir unendlich große Nullpunktsenergien, die z.B. im freien Hamiltonoperator (4.11) auftreten. Normalordnung führt dazu, daß die Konstante 1/2 unter dem Integral in (4.1) fehlt. In der QED zum Beispiel werden wir von nun an den Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{H}_I = -e : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu \psi(x) : \tag{4.20}$$

verwenden.

Nun betrachten wir ein Produkt von Feldoperatoren $A = A(x_1)$, $B = B(x_2)$, ... , die jeweils linear in den Erzeugern und Vernichtern sind. Nach (4.18) bzw. (4.19) gilt

$$AB - : AB := \begin{cases} [A^{(+)}, B^{(-)}]_+ \\ [A^{(+)}, B^{(-)}] \end{cases} , \tag{4.21}$$

wobei der obere Fall für zwei Fermionoperatoren gilt und der untere sonst. Desweiteren gilt

$$\langle 0|AB|0\rangle = \langle 0|A^{(+)}B^{(+)} + A^{(+)}B^{(-)} + A^{(-)}B^{(+)} + A^{(-)}B^{(-)}|0\rangle = \langle 0|A^{(+)}B^{(-)}|0\rangle, \tag{4.22}$$

und da Kommutatoren komplexe Zahlen sind

$$[A^{(+)}, B^{(-)}]_\pm = \langle 0|[A^{(+)}, B^{(-)}]_\pm|0\rangle = \langle 0|A^{(+)}B^{(-)}|0\rangle. \tag{4.23}$$

Kombiniert man (4.21) bis (4.23) findet man

$$AB =: AB : + \langle 0|AB|0\rangle. \tag{4.24}$$

Weiterhin gilt

$$: AB := \pm : BA :, \tag{4.25}$$

wobei das Minuszeichen im Falle zweier Fermionoperatoren gilt und das Pluszeichen sonst. D.H. bis auf das Vorzeichen ist die Reihenfolge der Operatoren in Normalprodukten egal.

Beweis:

$$: AB : = A^{(+)}B^{(+)} \pm B^{(-)}A^{(+)} + A^{(-)}B^{(+)} + A^{(-)}B^{(-)}$$

$$\begin{aligned} : BA : &= B^{(+)}A^{(-)} \pm A^{(-)}B^{(+)} + B^{(-)}A^{(+)} + B^{(-)}A^{(-)} \\ &= \pm A^{(+)}B^{(-)} + B^{(-)}A^{(+)} \pm A^{(-)}B^{(+)} \pm A^{(-)}B^{(-)} \\ &= \pm : AB : . \quad \square \end{aligned}$$

Desweiteren werden wir zeigen, daß

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} =: A(x_1)B(x_2): + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle. \tag{4.26}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} T\{A(x_1)B(x_2)\} &= \begin{cases} A(x_1)B(x_2) & t_1 > t_2 \\ \pm B(x_1)A(x_2) & t_2 > t_1 \end{cases} \\ &\overset{(4.24)}{=} \begin{cases} :A(x_1)B(x_2): + \langle 0|A(x_1)B(x_2)|0\rangle & t_1 > t_2 \\ \pm :B(x_2)A(x_1): + \langle 0| \pm B(x_2)A(x_1)|0\rangle & t_2 > t_1 \end{cases} \\ &\overset{(4.25)}{=} :A(x_1)B(x_2): + \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Wir werden die folgende Abkürzung für den Vakuumserwartungswert eines zeitgeordneten Produkts zweier Feldoperatoren verwenden, den man auch als *Kontraktion* bezeichnet:

$$A(x_1)\,B(x_2) \equiv \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)|0\rangle.$$

Kontraktionen verschwinden, z.B. $\phi(x_1)\,\psi(x_2) = 0$ oder $\psi(x_1)\,\psi(x_2) = 0$ (s. (3.12)), außer einer der beiden Feldoperatoren erzeugt ein Feld, das der andere vernichtet. Dann stimmt die Kontraktion mit dem Feynman-Propagator überein, z.B. $\phi(x_1)\,\phi(x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2)$.

Zusammenfassend gilt also die wichtige Formel:

$$T\{AB\} =: AB: + AB. \tag{4.27}$$

Die Verallgemeinerung dieser Formel auf Produkte beliebig vieler Feldoperatoren ist unter dem Namen *Wick'sches Theorem* bekannt. Es lautet:

$$\begin{aligned} T\{A\,B\,C\,D \ldots W\,X\,Y\,Z\} &= :A\,B\,C\,D \ldots W\,X\,Y\,Z: + :A\,B\,C \ldots Y\,Z: \\ &+ :A\,B\,C \ldots Y\,Z: + \ldots + :A\,B\,C \ldots Y\,Z: \\ &+ :A\,B\;C\,D \ldots Y\,Z: + \ldots + :A\,B \ldots W\,X\;Y\,Z: + \ldots \end{aligned} \tag{4.28}$$

Auf der rechten Seite steht eine Summe von Normalprodukten mit allen möglichen Kontraktionen, z.B.

$$:A\,B\,C\,D\,E\,F \ldots J\,K\,L\,M \ldots := (-1)^P\;A\,K\;\;B\,C\;\;E\,L\;:DF \ldots JM \ldots:,$$

wobei P die Anzahl der Vertauschungen benachbarter Fermionoperatoren ist, die notwendig sind, um die Kontraktionen aus dem normalgeordneten Produkt herauszuziehen. Der Beweis des Wick'schen Theorems beruht auf vollständiger Induktion. Wir wollen auf seine Darstellung hier verzichten. Der interessierte Leser sei z.B. auf das Buch von T.D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, verwiesen.

Die Bedeutung des Wick'schen Theorems liegt, wie bereits erwähnt, darin, daß man durch Zerlegung des zeitgeordneten Produkts in eine Summe von Normalprodukten mal Propagatoren Erwartungswerte von zeitgeordneten Produkten leicht berechnen kann. Insbesondere verschwinden alle Vakuumserwartungswerte von Normalprodukten und nur der Term, der lauter Kontraktionen enthält, bleibt übrig.

In gemischten Produkten der Form $T\{: A(x_1)B(x_1)... : ... : A(x_n)B(x_n)... :\}$, wie sie in der S-Matrix auftreten, erscheinen keine Kontraktionen innerhalb eines normalgeordneten Produkts, z.B. gibt es keinen Term $A(x_1)\,B(x_1)$, aber z.B. $A(x_1)\,A(x_n)$. Der Term $A(x_1)\,B(x_1)$ verschwindet schon deshalb, da Propagatoren zu gleichen Zeiten verschwinden.

4.2 Feynman Diagramme und Regeln

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung von Regeln zur Berechnung der Matrixelemente $\langle f|S|i\rangle$ in einer bestimmten Ordnung der Störungstheorie: $S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}$ (s. (4.17)). Im folgenden betrachten wir hierzu ausschließlich die QED, da sie das wichtigste physikalische Beispiel einer Feldtheorie, in der die Störungstheorie äußerst erfolgreich ist, darstellt. Ausgangspunkt ist also der Wechselwirkungsterm $\mathcal{H}_I = -e : \bar{\psi}\not{A}\psi :$, wobei wir die Abkürzung $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$ ("A-Slash") verwenden. Damit lautet der Term erster Ordnung in der S-Matrix:

$$
\begin{aligned}
S^{(1)} &= ie\int d^4x : \bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x) : \\
&= ie\int d^4x : (\bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x))(\not{A}^{(+)}(x) + \not{A}^{(-)}(x))(\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)) : .
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Multipliziert man die Produkte im Integranden aus, so erhält man acht Basisprozesse. Z.B. entspricht der Term $e : \bar{\psi}^{(+)}\not{A}^{(-)}(x)\psi^{(+)} :\sim da^\dagger c$ der Vernichtung eines Elektron-Positron-Paares und der Erzeugung eines Photons. Das bedeutet, daß der Anfangszustand (zumindest) ein Elektron-Positron-Paar enthalten muß, $|i\rangle = |e^+e^-\rangle$, und der Endzustand (zumindest) ein Photon, $|f\rangle = |\gamma\rangle$. Die verschiedenen Prozesse, die in einer bestimmten Ordnung von S enthalten sind, legen also die Endzustände fest, die

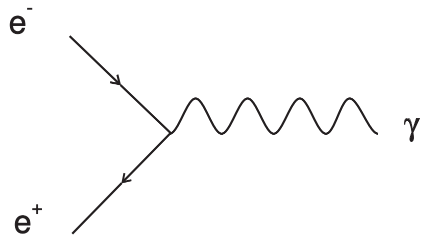


Abbildung 4.1:

selbst wieder aus auf den Vakuumzustand wirkende Erzeugern von Feldern bestehen. Diagrammatisch läßt sich dieser Prozeß wie in Abb.4.1 darstellen. (Positronen unterscheiden sich dabei von Elektronen dadurch, daß der Pfeil im Eingangskanal vom Vertex wegzeigt und im Ausgangskanal auf den Vertex zeigt.)

Dieses Diagramm heißt Vertex. Alle Prozesse in der Störungstheorie entstehen durch Kombinationen von Vertices und Propagatoren, wie wir sehen werden. Die zu $S^{(1)}$ gehörigen Prozesse sind für reale Teilchen aufgrund der Energie-Impulserhaltung verboten, d.h. $\langle f|S^{(1)}|i\rangle = 0$ (Beweis s.u.). Allgemein gilt, daß die Übergangswahrscheinlichkeit für Prozesse, die aufgrund von Erhaltungssätzen verboten sind, verschwinden. Für reale Prozesse müssen wir zumindest bis zur Ordnung $S^{(2)}$ gehen. Nach dem Wick'schen Theorem gibt es dabei sechs Subprozesse: $S^{(2)} = \sum_{i=1}^{6} S_i^{(2)}$. (Im folgenden benutzen wir $(\bar\psi \not{A} \psi)_x \equiv: \bar\psi(x)\not{A}(x)\psi(x) :$.)

Der erste Subprozeß nach dem Wick'schen Theorem ist der ohne Kontraktionen:

$$S_1^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2} :$$

Das entspricht zwei unverbundenen Vertices, da keine Kontraktion (Propagator) auftritt. Daraus folgt wegen der Energie-Impulserhaltung wieder $\langle f|S_1^{(2)}|i\rangle = 0$

Der nächste Term enthält eine Kontraktion zwischen Fermionoperatoren:

$$S_2^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2} : + : (\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2} :$$

Natürlich sind die beiden Summanden identisch, so daß

$$S_2^{(2)} = -e^2\int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2} :$$

Allgemein gilt in QED und QCD, daß der Faktor $1/n!$ in S in jeder Ordnung vernachlässigt werden kann, da gerade soviele identische Terme in diesen Theorien auftreten, daß sich dieser Faktor weghebt. Das gilt nicht für andere Theorien, wie z.B. die

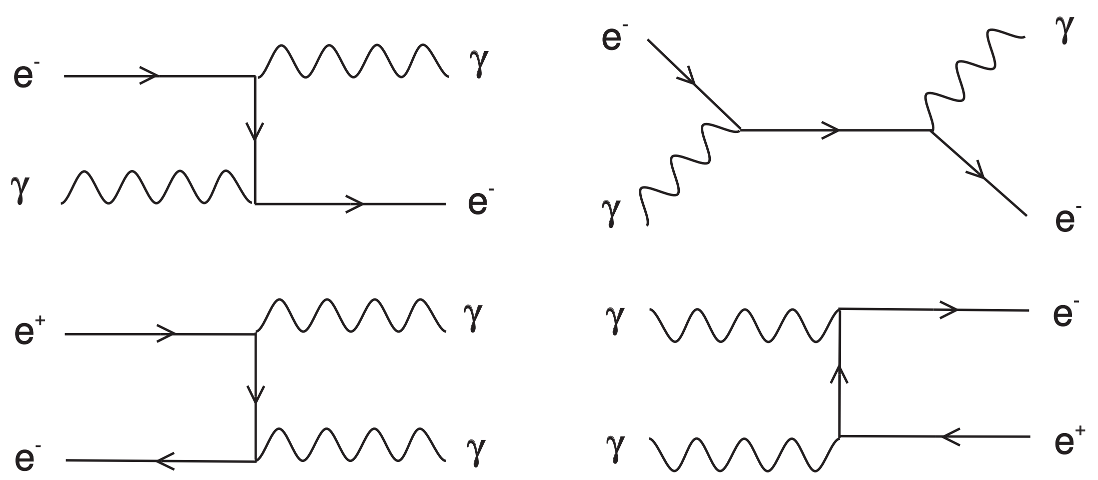


Abbildung 4.2:

ϕ^4-Theorie. Hier muß man die identischen Terme abzählen und mit dem Faktor $1/n!$ zu sog. Symmetriefaktoren kombinieren.

Der obige Subprozeß beinhaltet zwei externe Photonen, zwei externe Fermionen und einen Fermionpropagator. Aufgrund der Energie-Impulserhaltung sind nur Prozesse erlaubt, bei denen sich je zwei Teilchen im Anfangs- und Endzustand befinden. Das sind die folgenden Prozesse: $\gamma e^\pm \to \gamma e^\pm$ (Compton-Streuung), $e^+e^- \to 2\gamma$ (Paarvernichtung) und $2\gamma \to e^+e^-$ (Paarerzeugung). Diagrammatisch sind sie in Abb.4.2 dargestellt.

Als nächstes betrachten wir den Subprozeß mit einem Photonpropagator:

$$S_3^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi}\,\not{A}\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2} :$$

(Auch hier verschwindet der Faktor $1/2$, wie man durch Vertauschen von x_1 mit x_2 sieht.) Dieser Prozeß enthält jeweils zwei Fermionen im Anfangs- und Endzustand sowie einen Photonpropagator. Die möglichen physikalischen Prozesse sind $e^-e^- \to e^-e^-$ (Møller-Streuung) bzw. $e^+e^- \to e^+e^-$, die Abb.4.3 zeigt.

Als nächstes diskutieren wir Terme mit zwei Kontraktionen. Hier gibt es zunächst

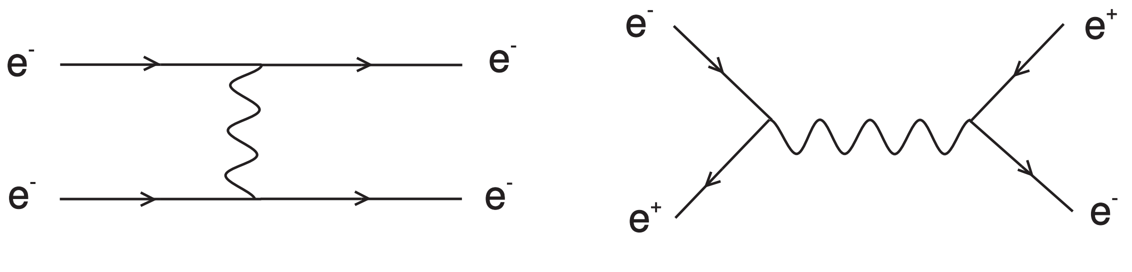


Abbildung 4.3:

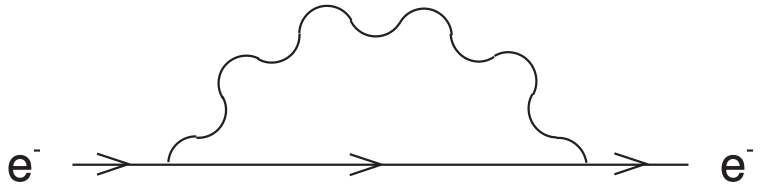


Abbildung 4.4:

den Subprozeß

$$S_4^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi}\not{A}\,\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2} :,$$

der je ein Fermion im Anfangs- und Endzustand, einen Photon- und einen Fermionpropagator besitzt (s. Abb.4.4) Dieser Prozeß wird als Fermionselbstenergie bezeichnet. Er beschreibt die Modifikation des freien Elektrons durch die Anwesenheit virtueller Photonen im Vakuum, die emittiert und wieder absorbiert werden können.

Außerdem existiert noch der Subprozeß

$$S_5^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2} :,$$

der je ein Photon im Anfangs- und Endzustand und zwei Fermionpropagatoren enthält (s. Abb.4.5). Dieser Prozeß heißt Photonselbstenergie oder Polarisationstensor und entspricht der Modifikation eines freien Photons durch spontane Bildung von virtuellen Elektron-Positron-Paaren im Vakuum.

Letztendlich gibt es noch den Subprozeß, der nur aus Kontraktionen besteht,

$$S_6^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : (\bar{\psi}\not{A}\,\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2} :,$$

und keine externen Teilchen besitzt (s. Abb.4.6). Solche Diagramme werden als Vakumdiagramme bezeichnet. Sie können i.a. vernachlässigt werden, da sie keinem Übergang entsprechen.

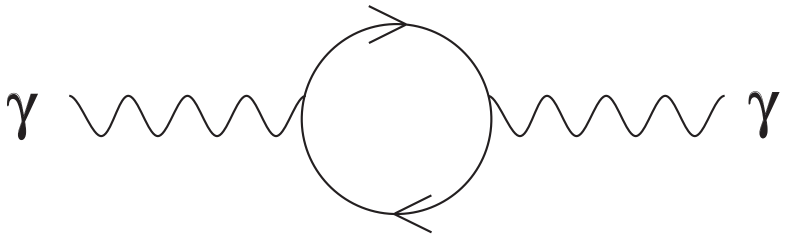


Abbildung 4.5:

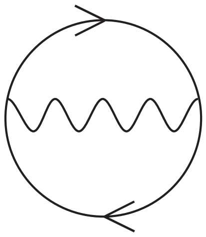


Abbildung 4.6:

Das Ziel wird nun sein, Regeln zu finden, um das Matrixelement $\langle f|S|i\rangle$ für festgelegte Anfangs- und Endzustände aus den entsprechenden Diagrammen direkt zu erhalten. Dazu ist es zweckmäßig zum Impulsraum überzugehen.

Für die Kontraktion zweier Fermionfelder findet man:

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2) = iS_F(x_1 - x_2) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip\cdot(x_1-x_2)}$$

mit

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}. \tag{4.30}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt

$$\begin{aligned}\not{p}^2 &= p_\mu\gamma^\mu p_\nu\gamma^\nu = \frac{1}{2}(p_\mu\gamma^\mu p_\nu\gamma^\nu + p_\nu\gamma^\nu p_\mu\gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{2}p_\mu p_\nu[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = \frac{1}{2}p_\mu p_\nu 2g^{\mu\nu} = p_\mu p^\mu = p^2\end{aligned}$$

verwendet.

Für die Kontraktion zweier Photonfelder ergibt sich:

$$\underbrace{A^\mu(x_1)A}^\nu(x_2) = iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F(k) e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}$$

mit (Feynman-Eichung)

$$D_F^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}\frac{1}{k^2 + i\epsilon}. \tag{4.31}$$

Die Anfangs- und Endzustände enthalten Teilchen entsprechend den externen (nichtkontrahierten) Feldern, die auf $|i\rangle$ und $|f\rangle$ wirken. Z.B. benötigt die Fermionselbstenergie einen Anfangszustand, der ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}$ und Spin s besitzt,

$$|i\rangle = |e^-, \mathbf{p}, s\rangle = c_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle.$$

Wir wollen nun annehmen, daß sich das System in einem endlichen Volumen V befindet, so daß aus den Fourierintegralen in (3.2), (3.12) und (3.25) Fourierreihen werden. Dann haben wir dort einfach $\int d^3p/(2\pi)^{3/2}$ durch $(1/V^{1/2})\sum_{\mathbf{p}}$ zu ersetzen. Wie wir

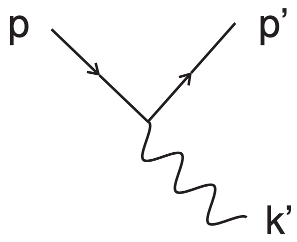


Abbildung 4.7:

unten sehen werden, fallen die Faktoren V aus dem Wirkungsquerschnitt heraus. Man erhält für die Wirkung der positiven Frequenzanteile (Vernichter) der externen Felder auf Elektron-, Positron- und Photonzustände, wie sie im Anfangs- und Endzustand vorkommen, aus den Fourierreihen für die verschiedenen Felder

$$\begin{aligned}
\psi^{(+)}(x)|e^-,\mathbf{p},s\rangle &= \frac{1}{(2VE_p)^{1/2}} u_s(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x}|0\rangle, \\
\bar{\psi}^{(+)}(x)|e^+,\mathbf{p},s\rangle &= \frac{1}{(2VE_p)^{1/2}} \bar{v}_s(\mathbf{p}) e^{-ip\cdot x}|0\rangle, \\
A_\mu^{(+)}(x)|\gamma,\mathbf{k},r\rangle &= \frac{1}{(2V\omega_k)^{1/2}} \epsilon^r_\mu(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x}|0\rangle.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Die Impuls- und Spinsummen verschwinden hierbei, da nur das Teilchen mit dem richtigen Impuls und Spin herausgesucht wird.

Für die Wirkung der negativen Frequenzanteile (Erzeuger) auf das Vakuum bekommt man:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^{(-)}(x)|0\rangle &= \sum_{\mathbf{p},s} \frac{1}{(2VE_p)^{1/2}} \bar{u}_s(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x}|e^-,\mathbf{p},s\rangle, \\
\psi^{(-)}(x)|0\rangle &= \sum_{\mathbf{p},s} \frac{1}{(2VE_p)^{1/2}} v_s(\mathbf{p}) e^{ip\cdot x}|e^+,\mathbf{p},s\rangle, \\
A_\mu^{(-)}(x)|0\rangle &= \sum_{\mathbf{k},r} \frac{1}{(2V\omega_k)^{1/2}} \epsilon^r_\mu(\mathbf{k}) e^{ik\cdot x}|\gamma,\mathbf{k},r\rangle.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Als Beispiel betrachten wir den Term erster Ordnung,

$$S^{(1)} = ie \int d^4x : \bar{\psi} \not{A} \psi :,$$

wobei wir nur den darin enthaltenen Prozeß der Photoemission von einem Elektron diskutieren wollen (s. Abb.4.7).

Der Anfangs- und Endzustand sind somit durch

$$|i\rangle = |e^-,\mathbf{p},s\rangle \qquad |f\rangle = |e^-,\mathbf{p}',s';\gamma,\mathbf{k}',r'\rangle$$

festgelegt. Damit bekommt man mit (4.32) und (4.33)

$$\begin{aligned}\langle f|S^{(1)}|i\rangle &= \langle e^-, \mathbf{p}', s'; \gamma, \mathbf{k}', r'|ie\int d^4x\bar{\psi}^{(-)}(x)\gamma^\mu A_\mu^{(-)}(x)\psi^{(+)}(x)|e^-, \mathbf{p}, s\rangle \\ &= ie\int d^4x \left[\frac{1}{(2VE_{p'})^{1/2}}\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')e^{ip'\cdot x}\right]\gamma^\mu\left[\frac{1}{(2V\omega_{k'})^{1/2}}\epsilon_\mu^{r'}(\mathbf{k}')e^{ik'\cdot x}\right] \\ &\times\left[\frac{1}{(2VE_p)^{1/2}}u_s(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}\right]. \end{aligned} \qquad (4.34)$$

Die Impuls- und Spinsummen in (4.33) fallen weg, da der Endzustand festgelegt ist. ($\bar{\psi}^{(-)}$ und $A_\mu^{(-)}$ nach links auf $|f\rangle$ angewandt sind Vernichter.)

Nun benutzen wir noch

$$\int d^4x e^{i(p'+k'-p)\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k'-p),$$

was nichts anderes als Energie-Impulserhaltung bedeutet.

Damit ergibt sich insgesamt für das Matrixelement

$$\langle f|S^{(1)}|i\rangle = \left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k'-p)\frac{1}{(2VE_{p'})^{1/2}}\frac{1}{(2V\omega_{k'})^{1/2}}\frac{1}{(2VE_p)^{1/2}}\right]\times\mathcal{M} \qquad (4.35)$$

mit der *Feynman-Amplitude*

$$\mathcal{M} = ie\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}')u_s(\mathbf{p}).$$

Als nächstes wollen wir die Energie-Impulserhaltung ausnutzen, um zu zeigen, daß das Matrixelement (4.35) verschwindet. Aufgrund der δ-Funktion ist das Matrisxelement nur dann von Null verschieden, wenn $p = p' + k'$ gilt. Zusätzlich gilt für reale Teilchen die Massenschalenbedingung, d.h. $p_0^2 = E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ bzw. $p^2 = m^2 = p'^2$ für das Elektron und $k'^2 = 0$ für das Photon. Quadriert man nun die Energie-Impulserhaltung, $p^2 = (p'+k')^2$, so folgt $m^2 = m^2 + 2p'\cdot k'$, d.h. $p'\cdot k' = 0$ muß gelten. Diese Gleichnung kann aber nicht erfüllt werden, da

$$p'\cdot k' = p_0'k_0' - \mathbf{p}'\cdot\mathbf{k}' = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}|\mathbf{k}'| - |\mathbf{p}'||\mathbf{k}'|\cos\theta > 0$$

gilt, wobei θ der Winkel zwischen $\mathbf{p}'$ und $\mathbf{k}'$ ist. Mit anderen Worten, ein freies Elektron kann kein Photon emittieren. Dasselbe gilt für alle anderen Prozesse, die in $S^{(1)}$ enthalten sind. Allerdings kann das Vertexdiagramm ohne weiteres Bestandteil eines nicht-verschwindenen Diagramms höherer Ordnung, z.B. Compton-Streuung in $S^{(2)}$, sein. Dann muß aber mindestens eine Linie am Vertex eine innere Linie sein, d.h. einem Propagator entsprechen. Innere Linien entsprechen virtuellen Teilchen, die ausgetauscht

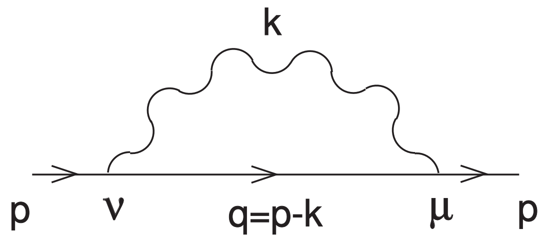


Abbildung 4.8:

werden und nicht auf der Massenschale sitzen. Tatsächlich wird der Propagator auf der Massenschale singulär.

In Schleifendiagrammen, wie z.B. in der Elektronselbstenergie (s.Abb.4.8), treten zusätzlich noch Impulsintegrationen auf.

Nach den Regeln für Propagatoren und externe Felder (4.30) bis (4.33) findet man:

$$\langle f|S^{(2)}(e^- \to e^-)|i\rangle = -e^2 \frac{1}{(2VE_p)^{1/2}} \frac{1}{(2VE_{p'})^{1/2}} \int d^4q d^4k$$
$$\delta^{(4)}(p' - k - q)\delta^{(4)}(p - k - q) iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu iS_F(q)\gamma_\nu u(\mathbf{p}).$$

Man beachte, daß die Reihenfolge der Spinorfaktoren γ_μ, S_F,u etc. nicht beliebig ist. Nach Integration über q überlebt die k-Integration:

$$\langle f|S^{(2)}(e^- \to e^-)|i\rangle = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p - p') \frac{1}{(2VE_p)^{1/2}} \frac{1}{(2VE_{p'})^{1/2}}$$
$$\times(-e^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, iD_F^{\mu\nu}(k)\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\mu iS_F(p - k)\gamma_\nu u(\mathbf{p}). \tag{4.36}$$

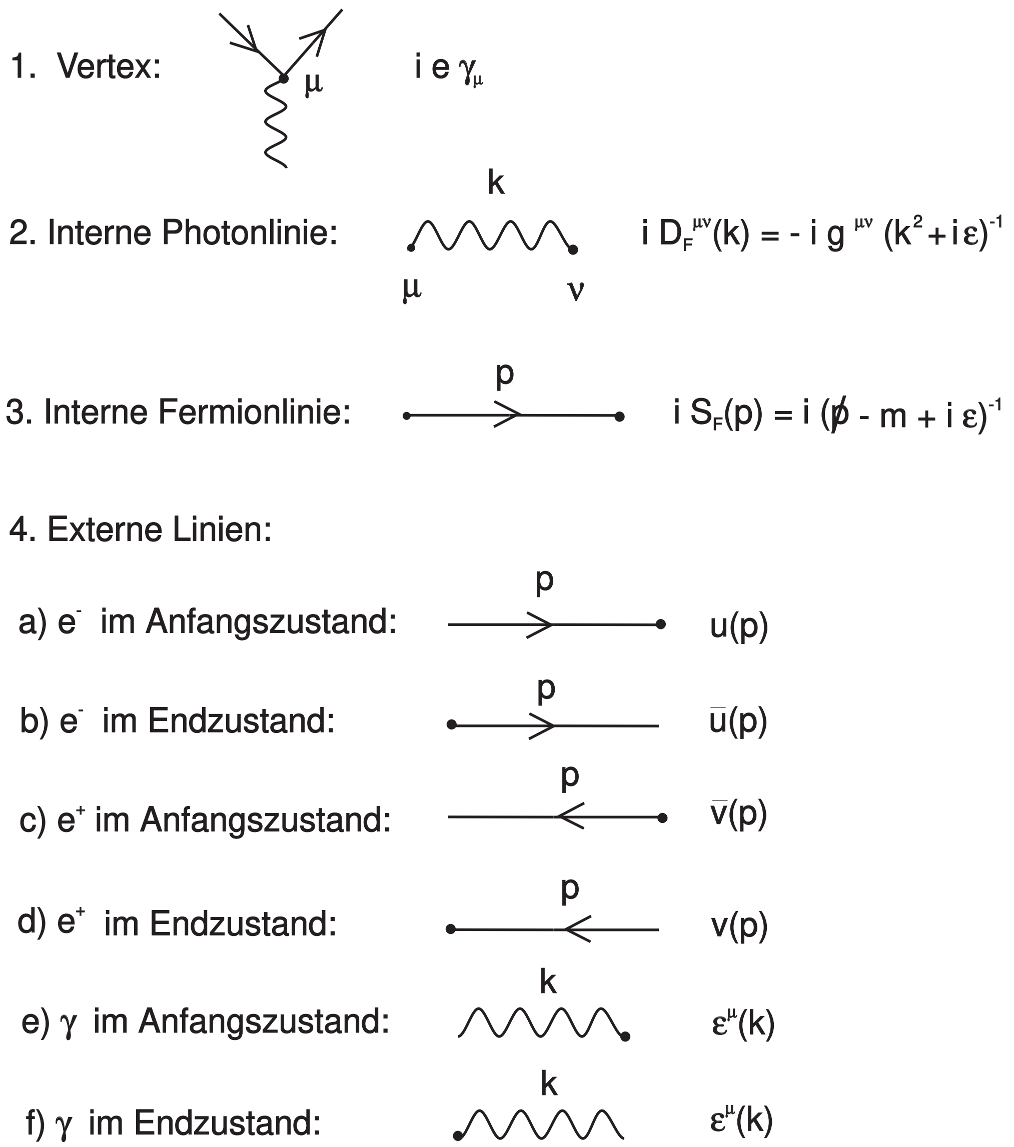
Allgemein läßt sich jedes Matrixelement in der Form

$$S_{fi} \equiv \langle f|S|i\rangle = \left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_{ext} \frac{1}{(2VE)^{1/2}}\right] \mathcal{M} \tag{4.37}$$

schreiben, wobei $E \epsilon \{E_p, \omega_k\}$, P_i die Summe aller Viererimpulse im Anfangszustand und P_f im Endzustand bezeichnet. Die Feynman-Amplitude kann als eine störungstheoretische Reihe geschrieben werden:

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^{(n)}.$$

Die einzelnen Terme $\mathcal{M}^{(n)}$ dieser Summe erhält man, indem man alle topologisch verschiedenen Diagramme mit n Vertices und den korrekten externen Linien, die zu $|i\rangle$ und $|f\rangle$ gehören, zeichnet. $\mathcal{M}^{(n)}$ folgt dann aus diesen Diagrammen mit Hilfe der *Feynman-Regeln*, die in der folgenden Liste zusammengefaßt sind:



5. Die Reihenfolge der Spinorfaktoren (γ^μ, S_F, u, etc.) für eine durchgehende Fermionlinie werden von links nach rechts in der Reihenfolge aufgeschrieben, die man antrifft, wenn man dem Pfeil in Gegenrichtung folgt.

6. Für jede geschlossene Fermionlinie bekommt man einen Faktor -1 und eine Spur über die γ-Matrizen. (Um dies zu sehen, betrachte man als Übung die Photonselbstenergie.)

7. Für jeden internen Impuls q in einer Schleife, der nicht durch Energie-Impulserhaltung festgelegt ist, erhält man ein Integral $\int d^4q/(2\pi)^4$.

Die Diagramme erklären also nicht nur die physikalisch ablaufenden Prozesse anschaulich, z.B. Elektron-Elektron-Streuung unter dem Austausch eines Photons, sondern lassen sich mittels der Feynman-Regeln direkt in mathematische Ausdrücke für die Übergangsamplituden übersetzen. Hat man alle Diagramme zu einer bestimmten Ordnung und bestimmten Anfangs- und Endzuständen gefunden, so erhält man daraus die Übergangswahrscheinlichkeit für den betrachteten Prozeß in der betreffenden Ordnung Störungstheorie.

4.3 Anwendungen der Störungstheorie

Literatur: F. Halzen, A.D. Martin, *Quarks and Leptons*.

4.3.1 Der Wirkungsquerschnitt

Die zentrale Größe bei Streuprozessen ist der Wirkungsquerschnitt. Dazu benötigen wir zunächst die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeitintervall T vom Zustand $|i\rangle$ nach $|f\rangle$. Diese folgt aus der S-Matrix gemäß

$$W_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{T}. \tag{4.38}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist nun definiert als

$$\sigma \equiv \frac{W_{fi}}{j} n_f, \tag{4.39}$$

wobei j den Fluß der einfallenden Teilchen und n_f die Zahl der möglichen Endzustände bezeichnet. Wir beschränken uns jetzt speziell auf Prozesse der Art $AB \to CD$. (Eine Verallgemeinerung auf mehr Teilchen im Endzustand ist leicht möglich.) Die Zahl der Endzustände im Volumen V und Impulsraumelement $d^3p_C d^3p_D$, d.h., daß der Impuls vom Teilchen C zwischen $\mathbf{p_C}$ und $\mathbf{p_C} + d\mathbf{p_C}$ liegt und analoges für Teilchen D gilt, ist gegeben durch

$$\frac{V d^3p_C}{(2\pi)^3} \frac{V d^3p_D}{(2\pi)^3}. \tag{4.40}$$

Dies entspricht der Zahl der quantenmechanisch erlaubten Zustände freier Teilchen in einem Würfel mit Volumen V ($\hbar = 1$).

Der Fluß der einfallenden Teilchen wird bestimmt durch die Relativgeschwindigkeit der Teilchen geteilt durch das Volumen:

$$j = \frac{|\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B}|}{V}. \tag{4.41}$$

Aus (4.37) ergibt sich

$$|S_{fi}|^2 = \left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)\right]^2 \frac{1}{16V^4 E_A E_B E_C E_D}|\mathcal{M}|^2. \tag{4.42}$$

Das hierbei auftretende, mathematisch nicht-wohldefinierte Quadrat einer δ-Funktion erfordert eine Erklärung. Wir behandeln es durch folgende Vorschrift:

$$\left[(2\pi)^4\delta(P)\right]^2 = (2\pi)^4\delta(P) \lim_{T,V\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3x e^{ix\cdot P} = \lim_{T,V\to\infty} TV(2\pi)^4\delta(P). \tag{4.43}$$

Damit erhalten wir für den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch Kombination von (4.39), (4.40), (4.41) und (4.43)

$$\begin{aligned} d\sigma &= V(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)\frac{1}{16V^4 E_A E_B E_C E_D}|\mathcal{M}|^2 \frac{V}{|\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B}|}\frac{Vd^3p_C}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3p_D}{(2\pi)^3} \\ &\equiv \frac{|\mathcal{M}|^2}{F}dQ \end{aligned} \tag{4.44}$$

mit den Lorentzinvarianten Größen (s. Halzen, Martin), Flußfaktor,

$$F = |\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B}|2E_A 2E_B, \tag{4.45}$$

und Phasenraumfaktor,

$$dQ = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)\frac{Vd^3p_C}{(2\pi)^3 2E_C}\frac{Vd^3p_D}{(2\pi)^3 2E_D}. \tag{4.46}$$

Man beachte, daß der Wirkungsquerschnitt weder von T noch von V abhängt!

Nun wollen wir speziell das Schwerpunktsystem, definiert durch $\mathbf{p_A} = -\mathbf{p_B}$, betrachten. Dann gilt

$$\begin{aligned} F &= 4p_i\sqrt{s}, \\ dQ &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f}{4\sqrt{s}}d\Omega \end{aligned} \tag{4.47}$$

mit $p_i \equiv |\mathbf{p_A}|$, $p_f \equiv |\mathbf{p_C}|$, $s \equiv (E_A + E_B)^2$ und dem Raumwinkelelement $d\Omega$ gegeben durch $d^3p_C = \mathbf{p_C^2}d|\mathbf{p_C}|d\Omega$.

Beweis:

$$\begin{aligned} F &= |\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B}|4E_A E_B = \left|\frac{\mathbf{p_A}}{E_A} - \frac{\mathbf{p_B}}{E_B}\right|4E_A E_B \\ &= \frac{E_A + E_B}{E_A E_B}|\mathbf{p_A}|4E_A E_B = 4p_i\sqrt{s} \end{aligned}$$

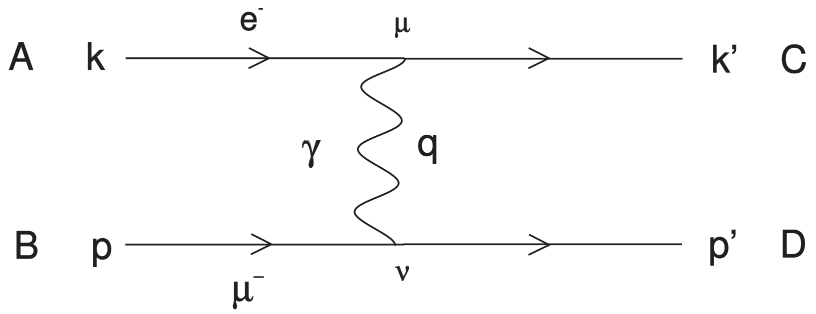


Abbildung 4.9:

$$\begin{aligned}
\int dQ... &= \frac{1}{16\pi^2}\int d^3p_C d^3p_D \delta(\mathbf{p_C}+\mathbf{p_D} \underbrace{-\mathbf{p_A}-\mathbf{p_B}}_{=0 \Rightarrow \mathbf{p_C}=-\mathbf{p_D}})\delta(E_A+E_B-E_C-E_D)\frac{1}{E_C E_D}... \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega dp_f p_f^2 \delta(\sqrt{s}-E_C-E_D)\frac{1}{E_C E_D}...
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{s} = E_C + E_D = \sqrt{m_C^2+p_f^2}+\sqrt{m_D^2+p_f^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sqrt{s}}{dp_f} = p_f\left(\frac{1}{E_C}+\frac{1}{E_D}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int dQ... &= \frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega d\sqrt{s}\,\delta(\sqrt{s}-E_C-E_D)\frac{p_f}{E_C+E_D}... \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\frac{p_f}{\sqrt{s}}\int d\Omega... \quad \Box
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SPS} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_f}{p_i}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle. \tag{4.48}$$

4.3.2 Elektron-Muon-Streuung

Als Beispiel wollen wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons an einem Muon im Detail durchrechnen. In niedrigster Ordnung Störungstheorie tritt nur das in Abb.4.9 gezeigte Diagramm auf.

Durch Anwendung der Feynman-Regeln bekommen wir die Feynman-Amplitude für diesen Prozeß. (Muonen unterscheiden sich dabei von Elektronen nur durch ihre Masse.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \bar{u}(k')ie\gamma^\mu u(k)\left(-ig_{\mu\nu}\frac{1}{q^2+i\epsilon}\right)\bar{u}(p')ie\gamma^\nu u(p) \\
&= i\frac{e^2}{q^2}\underbrace{\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)}_{e^-}\underbrace{\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)}_{\mu^-} \qquad (4.49)
\end{aligned}$$

Im allgemeinen sind die einlaufenden Teilchen unpolarisiert und die Polarisationen der auslaufenden werden nicht beobachtet. Dann muß man über die Spins im Eingangskanal mitteln und über die im Ausgangskanal, da der Wirkungsquerschnitt proportional zur Anzahl der Endzustände ist, summieren. Das so gemittelte Betragsquadrat der Feynman-Amplitude wird mit $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ bezeichnet. Aus (4.49) ergibt sich hierfür

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{q^4} L_{el}^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon}. \tag{4.50}$$

Die Zerlegung in einen elektronischen und einen muonischen Tensor ist möglich, da $\bar{u}\gamma^\mu u$ ein Skalar im Spinorraum ist. Der elektronische Anteil lautet:

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{Spins} [\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)][\bar{u}(k')\gamma^\nu u(k)]^\dagger,$$

wobei der Faktor 1/2 von der Mittelung über den Elektronen-Spin im Anfangszustand stammt. Für das adjungierte Spinorprodukt gilt:

$$[u^\dagger(k')\gamma^0\gamma^\nu u(k)]^\dagger = u^\dagger(k)\gamma^{\nu\dagger}\gamma^0 u(k') = \bar{u}(k)\gamma^\nu u(k'),$$

wobei im letzten Schritt $\gamma^{\nu\dagger} = \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0$ benutzt wurde, was sich leicht mit der in Abschnitt 2.3 angegebenen Darstellung für die γ-Matrizen zeigen läßt. Damit lautet der elektronische Anteil:

$$L_{el}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}_\alpha^r(k')\gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\beta^s(k)\bar{u}_\gamma^s(k)\gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta^r(k'),$$

wobei r, s wieder die Spins und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Spinorkomponenten bezeichnen. Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation $\sum_{s=1}^2 u_\alpha^s(k)\bar{u}_\beta^s(k) = (\not{k} + m)_{\alpha\beta}$, die im Anhang gezeigt wird, findet man:

$$\begin{aligned} L_{el}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\not{k}' + m)_{\delta\alpha}\gamma_{\alpha\beta}^\mu(\not{k} + m)_{\beta\gamma}\gamma_{\gamma\delta}^\nu \\ &= \frac{1}{2}Sp[(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma^\nu] \\ &= \frac{1}{2}Sp(\not{k}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu) + \frac{1}{2}m^2 Sp(\gamma^\mu\gamma^\nu) \end{aligned}$$

Die Auswertung der Spuren über Produkte von γ-Matrizen (s. Anhang (A.11)) ergibt:

$$L_{el}^{\mu\nu} = 2[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k \cdot k' - m^2)g^{\mu\nu}]. \tag{4.51}$$

Analog erhält man für den muonischen Tensor:

$$L_{\mu\nu}^{muon} = 2[p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - (p \cdot p' - M^2)g_{\mu\nu}], \tag{4.52}$$

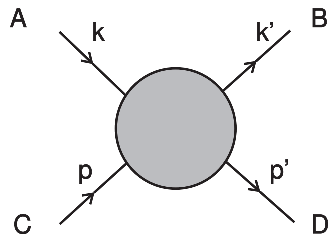


Abbildung 4.10:

wobei M die Muonmasse darstellt.

Aus (4.50) bis (4.52) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 4\frac{e^4}{q^4}[2(k\cdot p)(k'\cdot p') + 2(k\cdot p')(k'\cdot p) \\
&-2(k\cdot k' - m^2)(p\cdot p') - 2(p\cdot p' - M^2)(k\cdot k') + 4(k\cdot k' - m^2)(p\cdot p' - M^2)] \\
&= 8\frac{e^4}{q^4}[(k\cdot p)(k'\cdot p') + (k\cdot p')(k'\cdot p) - m^2(p\cdot p') - M^2(k\cdot k') + 2m^2M^2]. \quad (4.53)
\end{aligned}$$

Um den Ausdruck weiter zu vereinfachen, wollen wir den ultrarelativistischen Limes $|\mathbf{k}|, |\mathbf{p}| \gg m, M$ annehmen, in dem wir die Massen vernachlässigen können. Dann reduziert sich (4.53) auf

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \simeq 8\frac{e^4}{(k-k')^4}[(k\cdot p)(k'\cdot p') + (k\cdot p')(k'\cdot p)]. \tag{4.54}$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll die sog. Mandelstam-Variablen für Prozesse der Art $A + B \to C + D$ (s. Abb.4.10) einzuführen:

$$s \equiv (k+p)^2, \qquad t \equiv (k-k')^2, \qquad u \equiv (k-p')^2. \tag{4.55}$$

(Im Schwerpunktsystem ist die Mandelstam-Variable s durch die bereits in (4.47) verwendete Größe s gegeben.) Der Vorteil dieser Variablen ist ihre manifeste Lorentzinvarianz als Skalarprodukte von Viererimpulsen. Allerdings sind sie nicht voneinander unabhängig, da

$$\begin{aligned}
s + t + u &= k^2 + 2k\cdot p + p^2 + k^2 - 2k\cdot k' + k'^2 + k^2 - 2k\cdot p' + p'^2 \\
&= m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 + \underbrace{2k\cdot(p + k - k' - p')}_{=0}. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Im ultrarelativistischen Limes $m, M \simeq 0$, d.h. $k^2 \simeq p^2 \simeq k'^2 \simeq p'^2 \simeq 0$ gilt

$$s \simeq 2k\cdot p \simeq 2k'\cdot p', \qquad u \simeq -2k\cdot p' \simeq -2k'\cdot p,$$

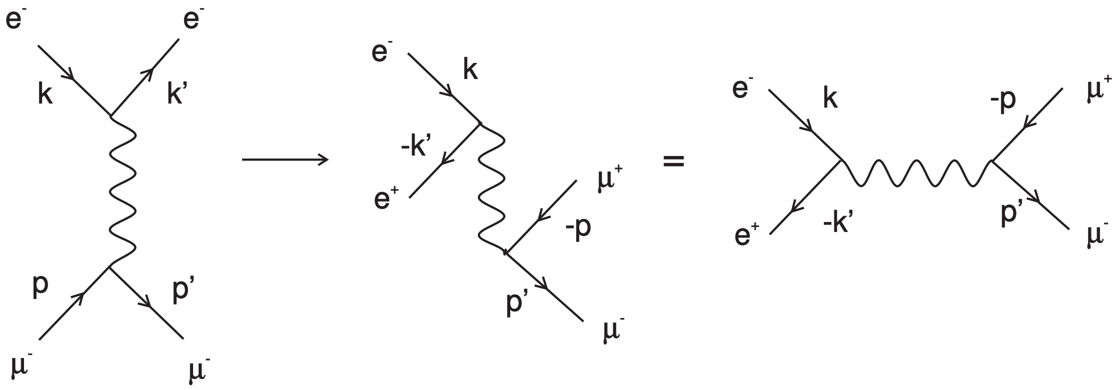


Abbildung 4.11:

wobei die Energie-Impulserhaltung z.B. in Form $(k+p)^2 = (k'+p')^2$ benutzt wurde. Setzen wir diese Näherungen in (4.54) so erhalten wir das einfache Resultat

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \simeq 2e^4 \frac{s^2+u^2}{t^2}. \tag{4.57}$$

Solche Prozesse, die einem Diagramm wie dem der Elektron-Muon-Streuung entsprechen und somit die Variable t im Nenner enthalten, heißen t-Kanal-Prozesse. Durch "Kreuzen" können daraus andere Prozesse, hier z.B. $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, ohne explizite Rechnung abgeleitet werden, wie in Abb.4.11 demonstriert.

Durch Vergleich der Impulse der beteiligten Teilchen in den beiden Prozessen, $k \leftrightarrow k$, $p \leftrightarrow -k'$, $k' \leftrightarrow -p$ und $p' \leftrightarrow p'$, woraus $s \leftrightarrow t$ und $u \leftrightarrow u$ folgt, resultiert direkt die Amplitude für den Prozeß $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \simeq 2e^4 \frac{t^2+u^2}{s^2}. \tag{4.58}$$

Wegen des Faktors s im Nenner werden Prozesse der Art, wie sie auf der rechten Seite von Abb.4.11 dargestellt sind, als s-Kanal-Prozesse bezeichnet. Man beachte, daß die Amplituden (4.57) und (4.58) Lorentzinvariant sind.

Zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte gehen wir wieder ins Schwerpunktsystem, in dem die Rechnung besonders einfach ist. Die Impulse in diesem System, in dem $|\mathbf{k}| = |\mathbf{p}|$ und $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}'|$ gelten, sind in der Abb.4.12 gezeigt.

Da Elektronen und Muonen elementare Teilchen sind und nicht angeregt werden können, handelt es sich bei der Streuung $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$ um eine elastische Streuung, d.h. es gilt $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ und $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$ und somit $p_i = p_f$. Die Mandelstam-Variable s ist nun gegeben durch

$$s \simeq 2k\cdot p = 2(k_0p_0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{p}) = 2|\mathbf{k}||\mathbf{p}|(1-\cos\phi) = 4|\mathbf{k}||\mathbf{p}| = 4|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|$$

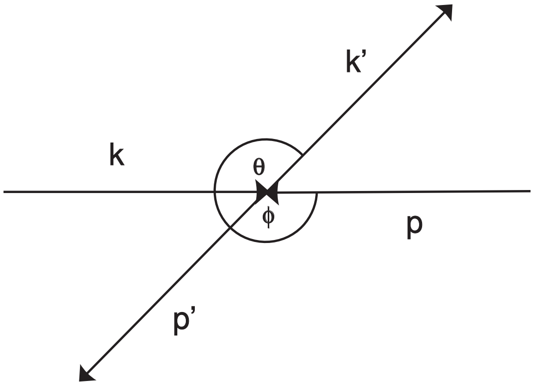


Abbildung 4.12:

und die Mandelstam-Variable t durch

$$t \simeq -2k \cdot k' = -2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|(1-\cos\theta).$$

Nun werden wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt (4.48) auf eine Ableitung nach t umschreiben, d.h.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{dt}{d\Omega}.$$

Mit $d\Omega = 2\pi d\cos\theta$ und

$$\frac{dt}{d\Omega} = \frac{1}{\pi}|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| = \frac{s}{4\pi}$$

finden wir aus (4.48)

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle. \tag{4.59}$$

Der Vorteil des Ausdrucks (4.49) ist, daß er Lorentzinvariant ist, so daß er in jedem System gilt, obwohl wir ihn nur im Schwerpunktsystem abgeleitet haben.

Setzen wir die Amplituden (4.57) und (4.58) in (4.59) ein, erhalten wir die differentiellen Wirkungsquerschnitte für die von uns betrachteten Prozesse:

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{e^-\mu^-\to e^-\mu^-} = \frac{e^4}{8\pi}\frac{s^2+u^2}{s^2t^2}, \tag{4.60}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = \frac{e^4}{8\pi}\frac{t^2+u^2}{s^4}. \tag{4.61}$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten wir daraus durch Integration über t. t läuft dabei von $t=-s$, entsprechend $\cos\theta=-1$, bis $t=0$, entsprechend $\cos\theta=1$. Die Variable u ersetzen wir wegen $s+t+u\simeq 0$ durch $-t-s$. Damit erhalten wir für die

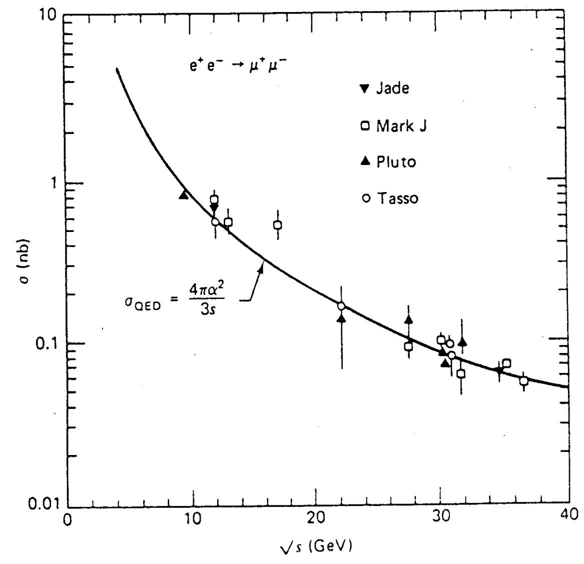


Abbildung 4.13:

Elektron-Positron-Annihilation (4.61)

$$\begin{aligned}\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} &= \frac{e^4}{8\pi s^4}\int_{-s}^{0} dt(2t^2+2ts+s^2)\\ &= \frac{e^4}{8\pi s^4}\left[\frac{2}{3}t^3+st^2+s^2t\right]_{-s}^{0}\\ &= \frac{e^4}{12\pi s}.\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Feinstruktur-Konstanten $\alpha = e^2/(4\pi)$ ergibt sich das Endresultat

$$\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \tag{4.62}$$

Diese Formel stimmt für Energien $\sqrt{s} \geq 10$ GeV sehr gut mit dem Experiment, wie es z.B. am Speicherring PETRA am DESY durchgeführt wurde, überein (s. Abb.4.13).

Der totale Wirkungsquerschnitt für Elektron-Muon-Streuung ist dagegen wegen $\int_{-s}^{0} dt/t^2$ divergent, was darauf zurückzuführen ist, daß die elektromagnetische Wechselwirkung langreichweitig ist. Diese infrarote Divergenz ist eine physikalische Divergenz, die auftritt, wenn die Streupartner unendlich weit voneinander entfernt sind. Nur durch die Anwesenheit von Materie, die Ladungen enthält, zwischen den weit entfernten Streupartnern kann diese Divergenz abgeschirmt werden (Debye-Abschirmung).

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch einige Bemerkungen zur Berechnung von anderen Prozessen machen:

1. Befinden sich Photonen im Eingangs- oder Ausgangskanal, wie z.B. bei der Compton-Streuung, so muß man ebenfalls über die Photonenpolarisationen mitteln bzw. summieren. Externe, reale Photonen haben nur transversale Polarisationen (s. Abschnitt 3.3). Zur Auswertung der Summen verwendet man die Formel (s. Halzen, Martin):

$$\sum_{r=1}^{2} \epsilon_\mu^r(\mathbf{k})\epsilon_\nu^s(\mathbf{k}) = -g_{\mu\nu}.$$

2. In der QCD muß außerdem noch über die Farben der Teilchen im Anfangs- und Endzustand gemittelt bzw. summiert werden.

3. Kompliziertere Prozesse wie z.B. Bremsstrahlung ($e^-e^- \to e^-e^-\gamma$) können, ähnlich wie oben beschrieben, behandelt werden. Allerdings wächst die Komplexität der Rechnungen sehr schnell an, und analytische Ausdrücke können meistens nicht mehr angegeben werden.

4. In Schleifendiagrammen, wie z.B. der Fermionselbstenergie, in denen Impulsintegrationen auftreten, begegnet man häufig Ultraviolettsingularitäten. Diese werden durch Renormierung beseitigt, wie wir im nächsten Kapitel diskutieren werden.

Kapitel 5

Renormierung

In diesem Kapitel soll ein Einblick in die Renormierungsprozedur in der Quantenfeldtheorie gegeben werden. Die Darstellung dieses komplexen Themas wird größtenteils nur schematisch bleiben. Auf detaillierte Ableitungen wird zugunsten einer mehr qualitativen Diskussion meistens verzichtet. Für eine weitergehende Einführung in dieses Problem wird auf die folgende Literatur verwiesen:

Mandl, Shaw, *Quantenfeldtheorie*, Kap. 9, 10; Nash, *Relativistic Quantum Field Theory*; Bogoliubov, Sirkov, *Quantenfelder*, Kap. 22 - 29.

5.1 Ultraviolettdivergenzen

Bisher wurden nur sog. Baumdiagramme, die keine Schleifen enthalten, berechnet, wie z.B. Streuprozesse in niedrigster Ordnung. Schleifendiagramme wie z.B. Selbstenergien haben wir dagegen noch nicht ausgewertet. Nach den Feynman-Regeln treten in Schleifendiagrammen Impulsintegrationen mit Integranden, in denen Propagatoren vorkommen, auf. In vielen Fällen konvergieren diese Integrale leider nicht, wenn man die obere Impulsgrenze unendlich setzt (Ultraviolettdivergenz).

Als Beispiel betrachten wir die Photonselbstenergie, die eine Impulsintegration über Fermionpropagatoren enthält (s. Abb.5.1).

Aus den Feynman-Regeln ergibt sich bei Vernachlässsigung der äußeren Photonenlinien (Amputation):

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu}(p) &= (-1)\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, Sp[ie\gamma_\mu iS_F(k)ie\gamma_\nu iS_F(q)] \\ &= -e^2\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \frac{Sp[\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu(\not{q}+m)]}{(k^2-m^2)(q^2-m^2)}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

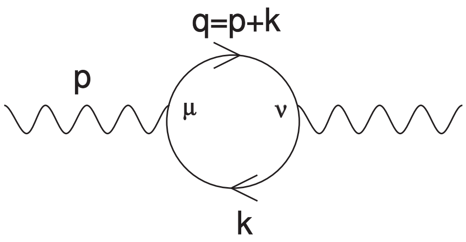


Abbildung 5.1:

Nach Ausführung der Spur mittels (s. Anhang (A.11))

$$Sp[\gamma_\mu(\not{k}+m)\gamma_\nu(\not{q}+m)] = 4(k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu - k\cdot q g_{\mu\nu} + m^2 g_{\mu\nu})$$

erkennt man, daß der Intergand in (5.1) für große k wie $1/k^2$ abfällt, so daß die Selbstenergie quadratisch ($\int d^4k/k^2$) divergiert.

Der mathematisache Grund für diese Divergenz ist die Benutzung von Propagatoren, die (im Ortsraum) ähnlich wie die δ-Funktion Distributionen sind (s. z.B. Bogoliubov, Sirkov, Kap. 18). Distributionen sind im Gegensatz zu Funktionen nur über die Wirkung einer Integration definiert. Ein Produkt von Distributionen (Multiplikation zweier Propagatoren) stellt eine neue Distribution dar, die durch Anwendung eines Integrals neu definiert werden muß. Eine naive Multiplikation von Distributionen kann dagegen auf Singularitäten führen, wie z.B. im Falle eines Produkts zweier δ-Funktionen mit demselben Argument.

Die physikalische Ursache ist darin zu suchen, daß wir es bei den bisher betrachteten Theorien mit lokalen Feldtheorien zu tun haben, d.h. die Felder hängen nur von einem Raum-Zeit-Punkt x ab. Deshalb findet die Wechselwirkung nur lokal an einem Punkt (Vertex) statt. Dazwischen breiten sich die Teilchen frei aus. Dies ist sicherlich eine grobe Idealisierung der in der Natur ablaufenden physikalischen Vorgänge. Besser wäre deshalb eine Formulierung in Form nicht-lokaler Feldtheorien, was allerdings auf Schwierigkeiten stößt, wenn man gleichzeitig Lorentzinvarianz, wie es in relativistischen Theorien der Fall sein sollte, verlangt. Darüberhinaus ist es fraglich, ob unendlich hohe Impulsüberträge, bei denen die Ultraviolettdivergenzen auftreten, physikalisch sinnvoll sind. Diese entsprechen nämlich einer punktförmigen Auflösung, die unter Umständen der zugrundeliegenden Raum-Zeit-Struktur widerspricht. Bei sehr kleinen Abständen von der Größenordnung 10^{-35} cm kommt es aufgrund der Unschärferelation zu Fluktuationen in der Raum-Zeit (z.B. spontane Bildung von Schwarzen Löchern), so daß man nicht mehr von einer homogenen Minkowski-Metrik sprechen kann.

Die Beseitigung der Divergenzen erfolgt in zwei Schritten: Als erstes müssen die Sin-

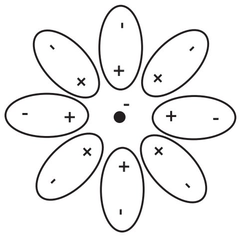


Abbildung 5.2:

gularitäten abgespaltet werden (*Regularisierung*). Danach werden diese Singularitäten in physikalischen Größen wie Ladung oder Masse absorbiert (*Renormierung*). Die Idee ist dabei, daß die in der Lagrangedichte auftretenden Parameter (Masse, Kopplungskonstanten, etc.) bei Vernachlässigung der Wechselwirkung keine physikalischen Größen (Observable), sondern unendlich groß und unbeobachtbar sind. Erst die Wechselwirkung, die ja immer vorhanden ist (z.B. in Form der Vakuumpolarisation bei den Selbstenergien), führt auf Singularitäten. Diese werden nun in den Parametern so absorbiert, daß die neuen (renormierten) Größen endlich sind und den beobachtbaren entsprechen. Als anschauliches Beispiel betrachten wir die unendlich große Ladung eines punktförmigen Elektrons. Durch die Polarisation des Vakuums (spontane Bildung von virtuellen Elektron-Positron-Paaren) wird, wie in Abb.5.2 gezeigt, die Ladung des Elektrons abgeschirmt und es ergibt sich die endliche beobachtbare Ladung.

Im Detail wollen wir die Beseitigung der Ultraviolettdivergenzen im nächsten Abschnitt am Beispiel der Renormierung der Elektronmasse in der Elektron-Selbstenergie studieren.

5.2 Die Elektron-Selbstenergie

Wir betrachten die in Abb.5.3 dargestellte Elektron-Selbstenergie und amputieren die äußeren Beine.

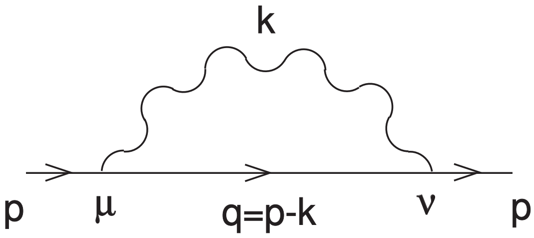


Abbildung 5.3:

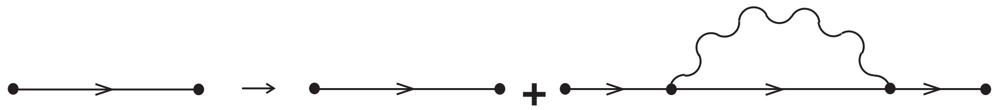


Abbildung 5.4:

Mittels der Feynman-Regeln und der Regeln für das Rechnen mit γ-Matrizen (s. Anhang (A.12)) finden wir:

$$\begin{aligned} i\Sigma(p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[ie\gamma_\nu iS_F(p-k)ie\gamma_\mu iD_F^{\mu\nu}(k)\right] \\ &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\gamma_\nu \frac{\not{p}-\not{k}+m}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}\gamma_\mu g^{\mu\nu}\frac{1}{k^2+i\epsilon}\right] \\ &= e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{2\not{p}-2\not{k}-4m}{(p-k)^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{k^2+i\epsilon}\right]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dieses Integral divergiert für $k \to \infty$ linear wie $\int d^4k/k^3$.

Die Schleifendiagramme werden auch Strahlungskorrekturen genannt. So stellt nämlich z.B. die Elektron-Selbstenergie eine Korrektur zum Elektronpropagator dar, die durch die Emission und Absorption eines virtuellen Photons zustandekommt (s. Abb.5.4).

Durch Iteration der Selbstenergie in Form einer *Dyson-Schwinger-Gleichung* wollen wir nun einen effektiven Elektronpropagator, der die Wechselwirkung mit den Photonen enthält, definieren. In diagrammatischer Form sieht die Dyson-Schwinger-Gleichung wie in Abb.5.5 gezeigt aus.

Als Formel geschrieben lautet sie:

$$\begin{aligned} iS^* &= iS + iSi\Sigma iS^* \\ S^* &= S + S(-\Sigma)S^* \\ &= S + S(-\Sigma)S + S(-\Sigma)S(-\Sigma)S + \ldots \\ &= S\sum_{n=0}^{\infty}(-\Sigma S)^n = S\frac{1}{1+\Sigma S} = \frac{1}{S^{-1}+\Sigma} \\ \Rightarrow S^*(p) &= \frac{1}{\not{p}-m_0+\Sigma(p)+i\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Der freie unrenormierte Propagator

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}-m_0+i\epsilon}$$

hat einen Pol bei der freien, unbeobachtbaren Masse m_0. Der effektive Propagator soll einen Pol bei der renormierten, beobachtbaren Masse m haben. Ähnlich wie in der

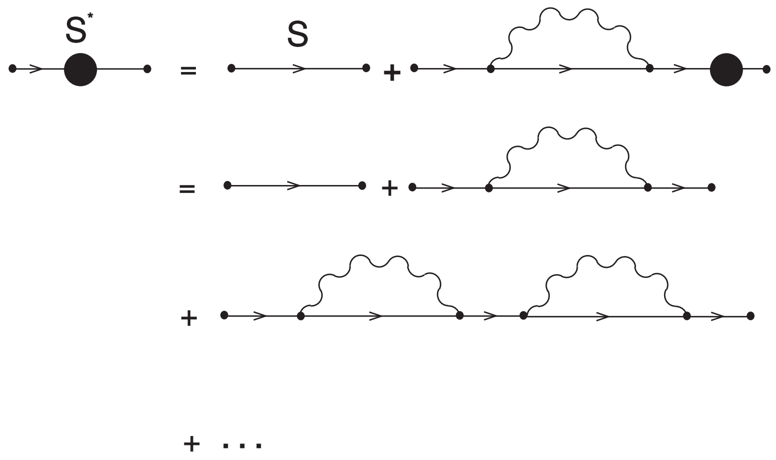


Abbildung 5.5:

Festkörperphysik, wo effektive Masssen für Elektronen in den Bändern auftreten, kommt die neue Masse durch die Wechselwirkung (hier mit virtuellen Photonen) zustande. Im Gegensatz zur Festkörperphysik wird dieser Mechanismus zur Beseitigung von UV-Divergenzen benutzt. Die renormierte Masse erhält man aus der freien durch Addition der unendlichen Größe δm, die sich aus $\Sigma(p)$ ergibt:

$$m = m_0 + \delta m. \tag{5.4}$$

Dies wird als Massenrenormierung bezeichnet.

Allgemein läßt sich die Elektron-Selbstenergie folgendermaßen schreiben, wie man durch Entwicklung um $\not p = m$ und unter Benutzung von $\not p^2 = p^2$ sieht (s. Nash):

$$\Sigma(p) = A + (\not p - m)B + (\not p - m)\Sigma_c(p). \tag{5.5}$$

Hierbei sind $A = \Sigma(\not p = m)$ und B unendliche p-unabhängige Konstanten, und $\Sigma_c(p)$ ist endlich. Die Konstante B wird in der Ladungsrenormierung, die weiter unten diskutiert wird, absorbiert, während A die Massenrenormierung bestimmt. Dazu setzen wir (5.5) in (5.3) ein:

$$S^*(p) = \frac{1}{\not p - m_0 + A + (\not p - m)(B + \Sigma_c(p))}$$

Dieser Propagator hat einen Pol bei $\not p = m$, wie gewünscht, falls

$$A = -\delta m, \tag{5.6}$$

wie mit (5.4) folgt.

Eine Alternative zu dem hier beschriebenen Vorgehen stellt die Benutzung von *Kontertermen* in der Lagrangedichte dar. Dazu benutzen wir die renormierte (physikalische)

Masse in der freien Lagrangedichte und führen einen Konterterm im Wechselwirkungsterm ein, der die unendliche Renormierungskonstante δm enthält:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi, \\
\mathcal{L}_I &= e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi + \delta m\bar{\psi}\psi.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Die Benutzung der physikalischen anstelle der freien Masse in der Lagrangedichte wird durch den Konterterm kompensiert. Wichtig dabei ist, daß die Konterterme dieselbe Struktur wie bereits in $\mathcal{L}$ vorkommende Terme besitzen, damit durch den Konterterm keine Symmetrien (z.B. Eichinvarianz) verletzt werden.

Als nächstes wollen wir die Renormierungskonstante δm explizit ausrechnen. Dazu müssen wir zuerst die Divergenz durch Regularisierung des divergenten Integrals abspalten. Dazu gibt es verschiedene Verfahren. Konzeptionell am einfachsten ist die "Cutoff"-Regularisierung, bei der einfach nur bis zu einer Obergrenze Λ integriert wird:

$$
\int_0^\infty dk... \to \int_0^\Lambda dk...
$$

Allerdings kann man zeigen, daß man auf diese Weise die Eichinvarianz verletzt. Besser ist die sog. Pauli-Villars-Regularisierung oder die dimensionale Regularisierung. Letztere, bei der die vierdimensionalen Integrale nach $4-\epsilon$ Dimensionen fortgesetzt werden, wo die Integrale konvergieren (s. Mandl, Shaw), stellt das übliche Regularisierungsverfahren in der modernen Feldtheorie dar. Hier wollen wir allerdings die Pauli-Villars-Methode anwenden, da sie mathematisch einfacher ist. Die Methode besteht darin, daß wir in unserem Beispiel den Photonpropagator folgendermaßen ersetzen:

$$
\frac{1}{k^2+i\epsilon} \to \frac{1}{k^2+i\epsilon} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\epsilon}. \tag{5.8}
$$

Im Falle $\Lambda \to \infty$ erhalten wir den üblichen Photonpropagator der QED zurück. Für $\Lambda < \infty$ dagegen finden wir

$$
\frac{1}{k^2+i\epsilon} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\epsilon} = \frac{-\Lambda^2}{(k^2+i\epsilon)(k^2-\Lambda^2+i\epsilon)},
$$

so daß die auf diese Weise regularisierte Elektron-Selbstenergie

$$
\Sigma_{reg} \overset{k\to\infty}{\sim} \int \frac{d^4k}{k^5}
$$

konvergiert.

Nun berechnen wir damit die Massenrenormierungskonstante aus (5.2):

$$\begin{aligned}\delta m &= -\Sigma(p)\Big|_{\not p=m} \\ &= ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{2(\not k+m)}{k^2-2p\cdot k+i\epsilon}\left(\frac{1}{k^2+i\epsilon}-\frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\epsilon}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Zur Auswertug dieses Integrals benutzen wir einige mathematische Tricks, die bei quantenfeldtheoretischen Rechnungen laufend verwendet werden und unter dem Begriff Feynman-Parametrisierung bekannt sind. Zunächst verwenden wir

$$\frac{1}{k^2+i\epsilon}-\frac{1}{k^2-\Lambda^2+i\epsilon}=\int_0^{\Lambda^2} dx\,\frac{1}{(k^2-x+i\epsilon)^2}.$$

Desweiteren gilt (s. Bronstein, *Taschenbuch der Mathematik*):

$$\frac{1}{a^2b}=2\int_0^1 dz\,\frac{z}{[b+(a-b)z]^3}.$$

Damit bekommen wir:

$$\delta m = ie^2\int_0^{\Lambda^2} dx\int_0^1 dz\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{4(\not k+m)z}{\underbrace{[k^2-2p\cdot k+(k^2-x-k^2+2p\cdot k)z+i\epsilon]^3}_{k^2-2p\cdot k(1-z)-xz+i\epsilon}}. \tag{5.10}$$

Der Vorteil der Einführung zusätzlicher Integrale besteht darin, daß nun die vierdimensionale k-Integration ausfgeführt werden kann. Dies ist ansonsten wegen der dabei auftretenden Winkelintegration nicht so einfach. Zu diesem Zweck benutzen wir die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\int d^4q\,\frac{1}{(q^2+y+i\epsilon)^n} &= i\pi^2\frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)}\frac{1}{y^{n-2}} \qquad \text{für } n\geq 3, \\ \int d^4q\,\frac{q^\mu}{(q^2+y+i\epsilon)^n} &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Hierbei ist die Γ-Funktion für natürliche Zahlen n durch $\Gamma(n)=(n-1)!$ gegeben. Der Beweis für die erste Formel erfolgt durch komplexe Integration über q_0 mittels des Residuensatzes und anschließender Integration über $|\mathbf{q}|$. Er kann z.B. in Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, für $n=3$ gefunden werden. Die zweite Formel ist trivial, da der Integrand ungerade ist. Um (5.10) auf die Form (5.11) zu bringen, machen wir die folgende Substitution:

$$q=k-p(1-z), \qquad y=-p^2(1-z)^2-xz.$$

Damit reduziert sich (5.10) auf

$$\begin{aligned}
\delta m &= ie^2 \int_0^{\Lambda^2} dx \int_0^1 dz \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left. \frac{4\not{q}z + 4\not{p}(1-z)z + 4mz}{(q^2+y+i\epsilon)^3} \right|_{\not{p}=m} \\
&= ie^2 \int_0^{\Lambda^2} dx \int_0^1 dz \left[\frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2!} \frac{4m(1-z)z + 4mz}{-m^2(1-z)^2 - xz} \right] \\
&= \frac{e^2 m}{8\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} dx \int_0^1 dz \frac{2z - z^2}{xz + m^2(1-z)^2} \\
&= \frac{e^2 m}{8\pi^2} \int_0^1 dz\, (2-z) \ln \frac{\Lambda^2 z + m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Da wir nur an dem divergenten Anteil im Limes $\Lambda \to \infty$ interessiert sind, können wir den Logarithmus durch $\ln(\Lambda^2/m^2)$ ersetzen, da

$$\ln \frac{\Lambda^2 z + m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2} \stackrel{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{z}{(1-z)^2}$$

und das z-Integral über den Λ-unabhängigen Term konvergiert. Als Endergebnis finden wir somit

$$\delta m = \frac{3e^2 m}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m} \tag{5.12}$$

Wichtig ist es, noch anzumerken, daß verschiedene Regularisierungsverfahren auf dasselbe Ergebnis führen. Dies wird dadurch gewährleistet, daß man die Renormierungskonstanten an den beobachtbaren Größen, in unserem Beispiel an der Elektronenmasse, festlegt.

Ohne explizite Rechnung (s. Bogoliubov, Sirkov) geben wir hier noch die Größen B und Σ_c in (5.5) an:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{e^2 m}{8\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m}, \\
\Sigma_c(p) &= \frac{e^2}{4\pi} \left[\left(\not{p} \frac{p^2+m^2}{4p^2} - m \right) \frac{p^2-m^2}{p^2} \ln \frac{m^2-p^2}{m^2} + m - \not{p} \left(\frac{3}{8} + \frac{m^2}{4p^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Man beachte, daß entgegen der naiven Erwartung die Elektron-Selbstenergie nicht linear sondern nur logarithmisch divergiert. Eine einfache Abschätzung wie nach (5.2) gibt nur den maximal möglichen Divergenzgrad.

Die unendliche Konstante B wird nun nicht in der Massenrenormierung absorbiert, sondern in der Renormierung der Ladung gemäß $e^2 = (1-B)e_0^2$, wobei e_0 die unphysikalische, unrenormierte und e die beobachtbare, renormierte Ladung bezeichnen. Die Renormierungskonstante der Ladung $1-B$ wird mit Z_2 bezeichnet. Im Gegensatz zur

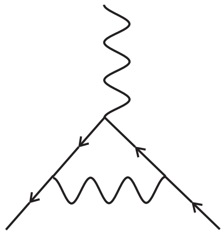


Abbildung 5.6:

Massenrenormierung handelt es sich bei der Ladung um eine multiplikative Renormierung.

Die divergente Photonselbstenergie führt ebenfalls zu einer Ladungsrenormierung, $e = Z_3^{1/2} e_0$, und ebenso die Vertexkorrektur (s.Abb.5.6), $e = e_0/Z_1$.

Insgesamt lautet somit die Ladungsrenormierung: $e = e_0 Z_3^{1/2} Z_2/Z_1$. Der Faktor Z_2 statt $Z_2^{1/2}$ rührt daher, daß an jedem Vertex zwei Fermionen vorkommen, so daß man die Elektron-Selbstenergie zweimal einsetzen muß (s. Abb.5.7).

Eine explizite Berechnung ergibt, daß $Z_1 = Z_2$ gilt. Dies ist eine Konsequenz der Eichinvarianz, die Relationen zwischen verschiedenen Diagrammen bedingt, die als Ward-Identitäten bezeichnet werden. Somit gibt es in der QED nur zwei unabhängige Renormierungskonstanten, nämlich für die Elektronmasse δm und für die Ladung Z_3.

Bisher haben wir nur die Renormierung für Graphen niedrigster Ordnung (Ein-Schleifen-Diagramme) betrachtet. Aber auch in höheren Graphen mit mehr Schleifen treten Divergenzen auf, z.B. in den Diagrammen in Abb.5.8.

Die ersten beiden Diagramme können als Kombination der Ein-Schleifen-Selbstenergien und der Vertex-Korrektur angesehen werden und enthalten somit keine prinzipell neuen Divergenzen. Das dritte Diagramm hingegen besitzt eine neue Divergenzstruktur. Solche Diagamme werden als primitiv divergent bezeichnet.

Es kann gezeigt werden, daß in QED zur Beseitigung der Divergenzen in allen Ordnungen keine zusätzlichen Renormierungskonstanten eingeführt werden müssen.

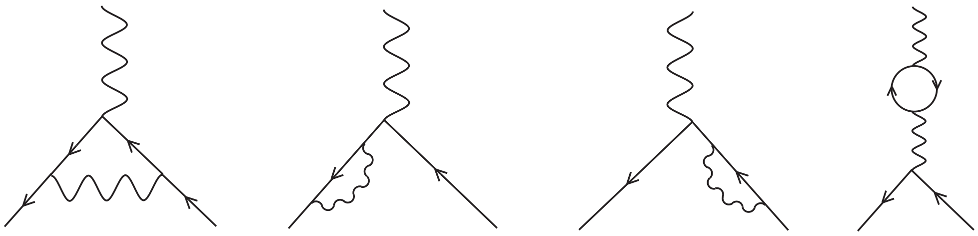


Abbildung 5.7:

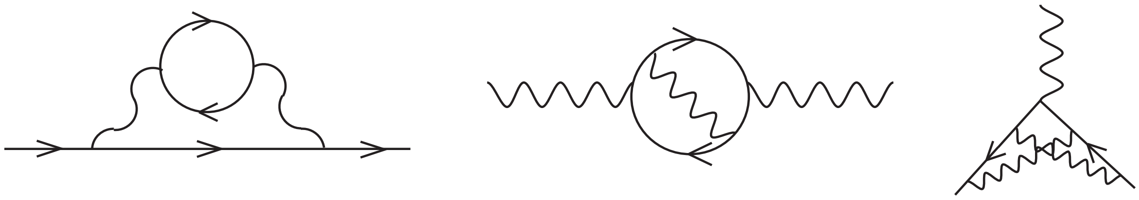


Abbildung 5.8:

Eine Theorie heißt renormierbar, wenn man zur Beseitigung aller Divergenzen (in allen Ordnungen der Störungstheorie) mit endlich vielen Renormierungskonstanten auskommt. Beispiele dafür sind die QED, die QCD und ϕ^4-Theorie. Dagegen ist die sog. NJL-Theorie, die einen Vier-Fermion-Wechselwirkungsterm der Form $(\bar{\psi}\psi)^2$ enthält nicht renormierbar. Die Forderung nach Renormierbarkeit einer Theorie schränkt die Wahl der Wechselwirkungsterme, die klassisch beliebig sind, drastisch ein. Wir wollen hier für die Renormierbarkeit ein Kriterium angeben, das auf Wilson zurückgeht. Dazu führen wir zunächst die Wilson-Dimension ein: Damit die Wirkung dimensionslos ist, müssen Lagrangedichten die Dimension MeV^4, kurz die Dimension vier, haben. Betrachten wir die bisher verwendeten freien Lagrangedichten für skalare Teilchen, Spinoren und Vektorfelder, so folgt daraus unter Beachtung von $\dim[m] = \dim[\partial] = 1$, daß die Dimensionen dieser Felder durch

$$\dim[A_\mu] = \dim[\phi] = 1, \qquad \dim[\psi] = 3/2$$

gegeben sind.

Das Wilson-Kriterium besagt nun, daß eine Theorie superrenormierbar ist, d.h. es existieren nur endlich viele primitiv divergente Diagramme, falls die Dimension des Wechselwirkungsterms ohne Kopplungskonstante kleiner als vier ist. Z.B. ist die ϕ^3-Theorie mit einem Wechselwikungsterm $\mathcal{L}_I = \kappa\phi^3$ superrenormierbar. In diesem Fall ist die Kopplungskonstante dimensionsbehaftet, $\dim[\kappa] = 1$, d.h. κ hat die Dimension einer Energie.

Eine Theorie *kann* renormierbar sein, falls der Wechselwirkungsterm (ohne Kopplungskonstante) die Dimension vier hat. Dann ist die Kopplungskonstante dimensionslos, so wie λ in der ϕ^4-Theorie oder e bzw. α in der QED. Sie kann aber auch nicht-renormierbar sein, d.h. in jeder Ordnung werden neue Renormierungskonstanten benötigt, wie z.B. eine Theorie mit massiven Vektorfeldern, die aufgrund des Massenterms der Vektorfelder $m^2 A_\mu A^\mu$ nicht eichinvariant ist. Entscheidend für die Renormierbarkeit von QED, QCD und der elektroschwachen Theorie ist nämlich die Eichinvarianz, die aufgrund der daraus folgenden Ward-Identitäten die Zahl der Renormierungskon-

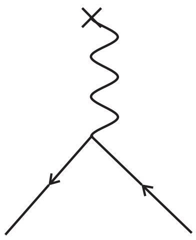


Abbildung 5.9:

stanten reduziert. Der Beweis für die Renormierbarkeit von nicht-abelschen Eichtheorien ist kompliziert und wurde erst um 1970 von t'Hooft durchgeführt. Erst dadurch wurden die nicht-abelschen Theorien als mögliche physikalische Theorien akzeptiert und ihr bahnbrechender Erfolg in Form der QCD und der elektroschwachen Theorie in der modernen Elemenarteilchenphysik ermöglicht.

Theorien mit einem Wechselwirkungsterm ohne Kopplungskonstante der Dimension fünf oder größer sind nicht-renormierbar. Beispiele sind die Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung und die NJL-Theorie, bei der ein Wechselwirkungsterm der Form $\mathcal{L}_I = G(\bar{\psi}\psi)^2$ auftritt, da $\dim[(\bar{\psi}\psi)^2] = 6$. In diesem Fall hat G die Dimension MeV^{-2}. Trotzdem können diese Theorien als effektive Theorien sinnvoll sein, solange man auf dem Baumgraphenniveau bleibt, in dem keine Divergenzen auftreten. So liefert die Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung, in der vier Fermionen direkt (ohne Austausch eines Eichbosons) miteinander wechselwirken, sehr gute Resultate. Der Erfolg dieser effektiven Theorie liegt darin begründet, daß die zugrundeliegende Theorie wegen der großen Massen der Eichbosonen ($W^\pm$, Z^0) kurzreichweitig ist, so daß die Annahme einer punktförmigen Wechselwirkung der z.B. am β-Zerfall beteiligten Fermionen für viele Zwecke in guter Näherung gerechtfertigt ist. Insbesondere für die QCD bei niedrigen Energien, wo die Störungstheorie versagt, leisten effektive nicht-renormierbare Theorien wie das NJL-Modell mit einer Vier-Quark-Wechselwirkung gute Dienste.

Zum Abschluß wollen wir noch kurz zwei Anwendungen diskutieren. Als erstes betrachten wir das anomale magnetische Moment des Elektrons. In der Dirac-Theorie ist das magnetische Moment des Elektrons durch

$$\mu_0 = -\frac{e}{2m}$$

gegeben (Bohr'sches Magneton). Dieses magnetische Moment tritt in Erscheinung, wenn das Elektron mit einem äußeren elektromagnetische Feld wechselwirkt, wie es in der Abb.5.9 dargestellt ist. (Das Kreuz an der Wellenlinie bedeutet, daß es sich nicht um ein Photon, sondern ein klassisches elektromagnetisches Feld handelt.)

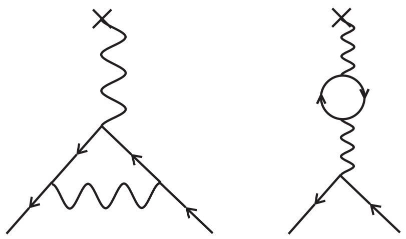


Abbildung 5.10:

Durch quantenfeldtheoretische Strahlungskorrekturen wird das magnetische Moment des Elektrons modifiziert. In niedrigster Ordnung geschieht dies durch die Diagramme in Abb.5.10. (Nach Renormierung tragen die beiden Vertexkorrekturen mit den Fermionselbstenergien (s. Abb.5.7) hierbei nicht mehr bei.):

Nach Renormierung findet man:

$$\mu = \left(1 + \frac{e^2}{8\pi^2}\right)\mu_0 = 1.00116\mu_0.$$

Unter Mitnahme der Zwei- und Drei-Schleifen-Diagramme – es gibt 72 verschiedene Drei-Schleifen-Diagramme! – wie z.B. die in Abb.5.11 gezeigten, ergibt sich:

$$\mu = 1.0011596524(4)\mu_0,$$

wobei die theoretische Unsicherheit in der letzten Stelle in Klammern angegeben ist. Der Vergleich mit dem Experiment (Stand: 1978),

$$\mu_{exper} = 1.00115965241(20)\mu_0$$

liefert eine der besten Übereinstimmungen von Theorie und Experiment in der Physik überhaupt. Dieser Erfolg wäre ohne die vom mathematischen Standpunkt aus etwas dubiose Renormierung nicht möglich.

Als letztes Beispiel wollen wir die Lamb-Verschiebung erwähnen. Dabei handelt es sich um eine Verschiebung der $2s_{1/2}$- und $2p_{1/2}$-Niveaus im Wasserstoffatom durch

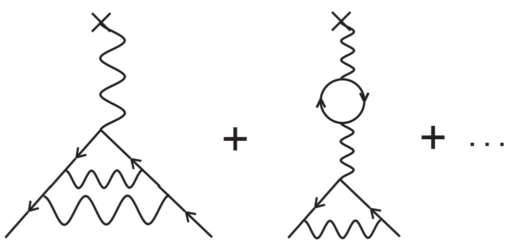


Abbildung 5.11:

Strahlungskorrekturen hervorgerufen durch das elektromagnetische Feld des Kerns. Die Verschiebung für die beiden Niveaus ist unterschiedlich, da die s-Welle im Gegensatz zur p-Welle in den Kern eindringt. Deshalb kommt es zu einer Energieaufspaltung der Niveaus, die 4.4×10^{-6} eV beträgt und zur Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms gehört.

Anhang A

Spinoren und γ-Matrizen

In diesem Anhang wollen wir einige nützliche Relationen für Spinorwellenfunktionen und γ-Matrizen aufstellen.

Die Dirac-Gleichung im Impulsraum lautet (s. Abschnitt 3.2):

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) &= 0, \\ (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$.

Die γ-Matrizen erfüllen die Antivertauschungsrelation

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu}. \tag{A.2}$$

Eine mögliche Darstellung der γ-Matrizen haben wir in Abschnitt 2.3 angegeben:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

mit der 2×2 Einheitsmatrix I und den drei Pauli-Matrizen σ_i. Nun wollen wir zeigen, daß die Lösungen der Dirac-Gleichung (A.1) die folgende Form besitzen:

$$u_r(\mathbf{p}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_r \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

mit

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und dem Normierungsfaktor $\mathcal{N}$.

Beweis:

Aus (A.1) folgt:

$$(\gamma_0 E - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m) u_r(\mathbf{p}) = 0$$

mit $p_0 = E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Durch Multiplikation mit γ_0 folgt daraus:

$$(\gamma_0 m + \gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) = E u_r(\mathbf{p}),$$

wobei wir

$$\gamma_0^2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

verwendet haben. In Matrixform lautet diese Gleichung:

$$\left[\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \right] u_r(\mathbf{p}) = E u_r(\mathbf{p})$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} u_r(\mathbf{p}) = E u_r(\mathbf{p}). \tag{A.5}$$

Einsetzen von (A.4) in (A.5) ergibt einerseits:

$$m\chi_r + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{E+m} \chi_r = E \chi_r$$
$$\Leftrightarrow (E+m)m + \mathbf{p}^2 = E(E+m), \quad \text{da } (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$$
$$\Leftrightarrow m^2 + \mathbf{p}^2 = E^2,$$

was erfüllt ist, und andererseits:

$$(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi_r - m \frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_r = E \frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_r$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{p}^2 (E+m) - m\mathbf{p}^2 = E\mathbf{p}^2$$
$$\Leftrightarrow E\mathbf{p}^2 = E\mathbf{p}^2,$$

was identisch erfüllt ist. □

Analog gilt:

$$v_r(\mathbf{p}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi'_r \\ \chi'_r \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

mit $\chi'_1 = \chi_2, \quad \chi'_2 = \chi_1$.

Die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ wählen wir folgendermaßen:

$$\mathcal{N} = (E+m)^{1/2}. \tag{A.7}$$

Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) &= \mathcal{N}^2 \left(\chi_r^\dagger,\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_r^\dagger\right) \cdot \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_s \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{N}^2 \left(\delta_{rs} + \frac{\mathbf{p}^2}{(E+m)^2}\delta_{rs}\right) = \mathcal{N}^2 \left(1 + \frac{E^2-m^2}{(E+m)^2}\right)\delta_{rs} \\
&= \mathcal{N}^2 \left(1 + \frac{E-m}{E+m}\right)\delta_{rs} = 2E\delta_{rs}. \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Der Faktor $1/(2E)^{1/2}$ in (3.12) war gerade so gewählt worden, daß $\psi(x)$ auf Eins normiert ist.

Weiterhin gilt die Vollständigkeitsrelation:

$$
\sum_{r=1}^{2} u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) = \not{p} + m \qquad \text{(A.9)}
$$

Beweis:

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_r(\mathbf{p}) &= u_r^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0 = \mathcal{N}\left(\chi_r^\dagger,\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_r^\dagger\right) \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{N}\left(\chi_r^\dagger,\ -\frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_r^\dagger\right).
\end{aligned}
$$

Weiterhin gilt:

$$
\sum_{r=1}^{2} \chi_r\chi_r^\dagger = I.
$$

Daraus folgt:

$$
\sum_{r=1}^{2} u_r(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) = \mathcal{N}^2 \begin{pmatrix} I & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} & -\left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\right)^2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\mathbf{p} & \underbrace{\frac{\mathbf{p}^2}{E+m}}_{-E+m} \end{pmatrix} = \gamma_0 E + m\,I - \vec{\gamma}\cdot\mathbf{p} = \not{p} + m. \qquad \square
$$

Analog gilt:

$$
\sum_{r=1}^{2} v_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p}) = \not{p} - m. \qquad \text{(A.10)}
$$

Zum Schluß wollen wir noch einige nützliche Formeln für das Rechnen mit γ-Matrizen aufstellen, die sich aus (A.2) und (A.3) ergeben:

$$\begin{aligned}
&Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 g_{\mu\nu}, \\
&Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \\
&Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu \ldots \gamma_\omega) = 0, \text{ falls die Anzahl der Matrizen ungerade ist.}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Die erste Beziehung folgt aus

$$Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu) = \frac{1}{2} Sp(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = g_{\mu\nu} Sp \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 4 g_{\mu\nu}.$$

Der Beweis der anderen Relationen stellt eine gute Übung für den Umgang mit γ-Matrizen dar.

Außerdem gilt (ohne Beweis):

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4, \qquad \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}, \qquad \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4 a \cdot b \tag{A.12}$$

für beliebige Vierervektoren a, b.